

ლექცია 3

14. ორთოგონალური სიბნალების თეორია

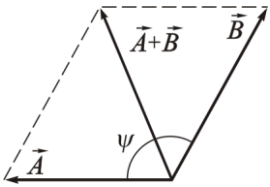
შემოვიტანეთ რა ხაზოვანი სივრცის სტრუქტურა, განვსაზღვრეთ ნორმა და მეტრიკა, ჩვენ, ამის მიუხედავად მაინც არ შეგვიძლია გამოვთვალოთ ისეთი მახასიათებელი, როგორიცაა კუთხე ორ ვექტორს შორის. ამას შევძლებთ, თუ შემოვიტანთ მნიშვნელოვან ცნებას – **ხაზოვანი სივრცის ელემენტების სკალარულ ნამრავლს**

14.1 სიბნალების სკალარული ნამრავლი

გავიხსენოთ, რომ ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში ცნობილია ორი $\vec{A}$ და $\vec{B}$ ვექტორი, მაშინ მათი ჯამის კვადრატის მოდული

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2(\vec{A} \cdot \vec{B}), \quad (1.18)$$

სადაც $(\vec{A} \cdot \vec{B}) = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \psi$ - ამ ვექტორების სკალარული ნამრავლია, რომელიც დამოკიდებულია მათ შორის ψ კუთხეზე.



ანალოგური მოქმედებით, გამოვთვალოთ ორი u და v სიგნალის ენერგიების ჯამი

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (u + v)^2 dt = E_u + E_v + 2 \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot v dt. \quad (1.19)$$

ნახ. 1.34

სიგნალებიდან განსხვავებით მათი ენერგიები არ არის **ადიტიური** (არ იკრიბება) ვინაიდან ენერგია

$$E \text{ შეიცავს დამატებით } \text{ურთიერთ} \text{ ენერგიას } E_{uv} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot v dt.$$

(1.18) და (1.19) ფორმულების ურთიერთშედარებით, დავადგენთ u და v ნამდვილი სიგნალების სკალარულ ნამრავლს:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) dt, \quad (1.20)$$

ხოლო მათ შორის კუთხის კოსინუსი იქნება:

$$\cos \psi = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}. \quad (1.21)$$

სკალარულ ნამრავლს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

1. $(u, v) \geq 0$;

2. $(u, v) = (v, u)$;
3. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$, სადაც λ - ნამდვილი რიცხვია;
4. $(u + v, w) = (u, w) + (v, w)$.

საზოგადოებრივი სივრცეს ასეთი სკალარული ნამრავლი უწოდებენ **ბილბერტის ნამდვილ H სივრცეს** [დავიდ ბილბერტი (1862-1943) გერმანელი მათემატიკოსი].

ქვემოთაა **კოში-ბუნიაკოვსკის ფუნდამენტალური უტოლობა**

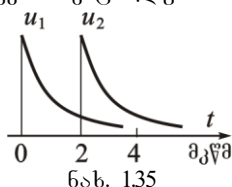
$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|. \quad (1.23)$$

თუ სივრცეები იღებენ კომპლექსურ მნიშვნელობებს, მაშინ სკალარული ნამრავლის შემოტანით ქვემოთ მოყვანილი ფორმულით, შესაძლებელია განვსაზღვროთ **კომპლექსური ბილბერტის სივრცე**:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt \quad (1.24)$$

იხეი, რომ $(u, v) = (v, u)^*$.

მაგალითი 1.11. გვაქვს ორი დროში წანაცვლებული ფორმით ექსპონენციალური იმპულსი (იხ. ნახ. 135):



ნახ. 135

$$u_1(t) = 5 \cdot \exp(-10^5 t) \sigma(t),$$

$$u_2(t) = 5 \cdot \exp[-10^5 (t - 2 \cdot 10^{-6})] \sigma(t - 2 \cdot 10^{-6}).$$

იპოვეთ მოცემული სიგნალების სკალარული ნამრავლი, და კუთხე ψ მათ შორის.

ამოხსნა. ამ სიგნალების ენერგიები ერთნაირია:

$$\|u_1\|^2 = \|u_2\|^2 = \int_0^{\infty} (5e^{-10^5 t})^2 dt = 25 \int_0^{\infty} e^{-2 \cdot 10^5 t} dt = 1.25 \cdot 10^{-4}, \quad \text{ვ}^2 \cdot \text{წმ}.$$

სკალარული ნამრავლი

$$(u_1, u_2) = 25 \int_0^{\infty} e^{-10^5 t} e^{-10^5 (t - 2 \cdot 10^{-6})} dt = 1.023 \cdot 10^{-4}, \quad \text{ვ}^2 \cdot \text{წმ}.$$

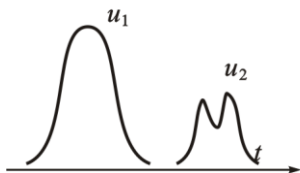
$$\cos \psi = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{1.023 \cdot 10^{-4}}{1.25 \cdot 10^{-4}} = 0.819 \quad \text{და} \quad \psi = 35^\circ$$

14.2. ორთოგონალური სიგნალები და ფურიეს ბანზოგადოებული მჭკრივები

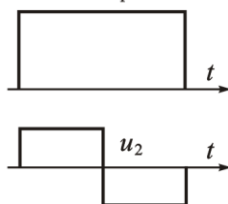
ორტოგონალობის პრინციპი. ორ სიგნალს უწოდებენ **ორტოგონალურს**, თუ მათი **სკალარული ნამრავლი** და **ურთიერთ**

ენერგია უდრის ნულს: $(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t)dt = 0$. (1.25)

ასეთი სახის სიგნალების მაგალითებია (იხ. ნახ. 1.36 და 1.37)



ნახ. 1.36



ნახ. 1.37

ვთქვათ, H არის **გილბერტის** სიგნალების სივრცე ენერგიის სასრული მნიშვნელობით. ეს სიგნალები განსაზღვრულია დროის სასრულ $[t_1, t_2]$ ან უსასრულო მონაკვეთზე. დაუშვათ, რომ ამ მონაკვეთზე მოცემულია ფუნქციების $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ უსასრულო სისტემა, რომლებიც ორთოგონალური არიან ერთმანეთის მიმართ და გააჩნიათ ერთეულოვანი სიდიდის ნორმები, ანუ:

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{თუ } i = j \\ 0, & \text{თუ } i \neq j. \end{cases} \quad (1.26)$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ სიგნალების სივრცეში მოცემულია **ორტონორმირებული ბაზისი**.

ნებისმიერი სიგნალი $s(t) \in H$ დავშალოთ რიგად:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(t). \quad (1.27)$$

(1.27) სახით წარდენას ეწოდება ამორჩეულ ბაზისში $s(t)$ სიგნალის **ფურიეს ბანზოგადოებული მჭკრივი**.

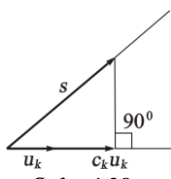
მოცემული მჭკრივის კოეფიციენტებს პოულობენ შემდეგ ნაირად. ვიღებთ ბაზისურ ფუნქციას u_k ნებისმიერი k ნომრით, ვამრავლებთ მასზე ტოლობის (1.27) ორივე მხარეს, ხოლო შემდეგ ვაწარმოებთ რეზულტატების ინტეგრირებას დროში:

$$\int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \int_{t_1}^{t_2} u_i u_k dt. \quad (1.28)$$

ვინაიდან (1.28) ტოლობის მარჯვენა მხარე ორტონორმირებული ბაზისია, მაშასადამე რჩება მხოლოდ j -ამის წევრი ნომრით $i = k$, ამიტომ

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) u_k(t) dt = (s, u_k). \quad (1.29)$$

შესაძლებლობა წარმოვიდგინოთ სიგნალები განზოგადებული ფურიეს მწკრივის მეშვეობით არის დიდი პრინციპული მნიშვნელობის ფაქტი. იმის ნაცვლად, რომ გამოვიკლიოთ ფუნქციული დამოკიდებულება წერტილების უსასრულო სიმრავლეში, ჩვენ გვუძლევა საშუალება ამ სიგნალების დახასიათება სასრული (ზოგადად რომ ვთქვათ, უსასრულო) ფურიეს განზოგადოებული მწკრივის c_k კოეფიციენტების სიმრავლით.



ნახ. 1.38

გეომეტრიულ ენაზე ფორმულა (1.29) ინტერპრეტაცია ასეთია: ფურიეს განზოგადოებული მწკრივის c_k კოეფიციენტები არის $\vec{s}$ ვექტორის პროექცია ბაზისურ მიმართულე-ბაზე (იხ. ნახ. 1.38).

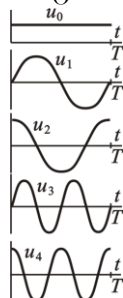
1.4.3. ორტონორმირებული ბაზისების მახასიათებელი

განვიხილოთ ურთიერთ ორტოგონალური ფუნქციების სისტემების აგების ყველაზე მნიშვნელოვანი და გავცელებული ორი ხერხი.

1.4.3.1. ჰარმონიული რხევის ორტონორმირებული სისტემა

თვითონ შევიძლიათ დარწმუნდეთ, რომ $[0, T]$ მონაკვეთზე ტრიგონომეტრიული სისტემა ჯერადი სიხშირეებით, მუდმივი სიგნალით დამატებული (იხ. ნახ. 1.39), ქმნიან ორტონორმირე-

$$\begin{aligned} u_0 &= 1/\sqrt{T}, \\ u_1 &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi t / T, \\ u_2 &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi t / T, \\ &\dots \dots \dots \\ u_{2m-1} &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi m t / T, \\ u_{2m} &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi m t / T, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$



ნახ. 1.39

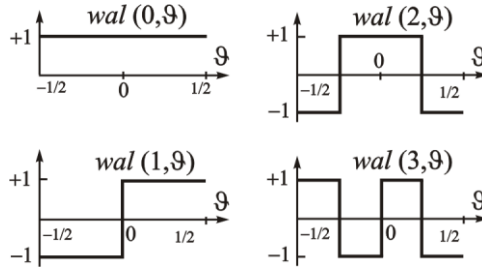
ბულ ბაზის. ამ სისტემით პერიოდული ფუნქციის დაშლა ფურიეს მწკრივად განხილული იქნება მე-2 თავში.

1.4.3.2. უოლშის ფუნქციების ორთონორმირებული სისტემა

ბოლო დროს დისკრეტული სიგნალების დამუშავების მეთოდების გავლენით დიდი ყურადღება ეთმობა უოლშის ფუნქციების ორთონორმირებულ სისტემას, რომლებიც თავისი არსებობის $[-T/2, T/2]$ ინტერვალში იღებენ მხოლოდ ± 1 მნიშვნელობას. ამიტომ სიგნალები, რომლებიც შეესაბამება უოლშის ფუნქციებს, მარტივად გენერირდება მიკროელექტრონული გადამრთველი სქემებით.

შემოვიტანოთ უზომო დრო $\vartheta = t/T$ და, როგორც მიღებულია, ავღნიშნოთ უოლშის k -რი ფუნქცია სიმბოლოთ $wal(k, \vartheta)$.

მოცემული ფუნქციების ანალიტიკური აღწერა საკმარისად რთულია. მაგრამ ამ სისტემის აგების იდეა მარტივად შესაძლებელია დავინახოთ ნახ. 140-ზე რომელზეც გამოსახულია უოლშის ფუნქციის პირველი რამდენიმე წევრი.



ნახ. 140

ცხადია, რომ ნებისმიერი k -რი მნიშვნელობისათვის უოლშის ფუნქციის ნორმირების მნიშვნელობა უდრის 1-ს:

$$\|wal(k, \vartheta)\|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} wal^2(k, \vartheta) d\vartheta = 1$$

ამ ფუნქციების ორთოგონალობა გამომდინარეობს მათი აგების პრინციპიდან და შესაძლებელია უშვადლოდ შევამოწმოთ.

მაგალითად:

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} \text{wal}(1, \vartheta) \text{wal}(2, \vartheta) d\vartheta &= \int_{-1/2}^{-1/4} (-1)^2 d\vartheta + \int_{-1/4}^0 (-1) \cdot 1 d\vartheta + \\ &+ \int_0^{1/4} 1^2 d\vartheta + \int_{1/4}^{1/2} 1 \cdot (-1) d\vartheta = 0 \end{aligned}$$

დროის მონაკვეთზე $[-T/2, T/2]$ მოცემული, ზღვრული ენერგიის მქონე სიგნალის დაშლა ფურიეს განზოგადოებულ რიგში უოლშის ფუნქციების მიხედვით აქვს სახე

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \text{wal}(k, t/T).$$

მაგალითი. იპოვეთ პირველი ორი კოეფიციენტი მართკუთხა სამკუთხედის იმპულსის ფორმის დაშლისას უოლშის ფუნქციების სისტემით.

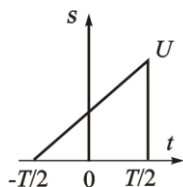
ამოხსნა. დასაშლელი სიგნალი $[-T/2, T/2]$ მონაკვეთზე აღიწერება ფუნქციით $s(t) = U(t/T + 1/2)$ (იხ. ნახ. 141).

გამოთვალეთ ფურიეს განზოგადოებული მწკრივის კოეფიციენტები

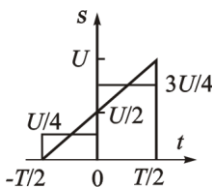
$$c_0 = \int_{-1/2}^{1/2} s(\vartheta) \text{wal}(0, \vartheta) d\vartheta = U \int_{-1/2}^{1/2} (\vartheta + 1/2) d\vartheta = U/2,$$

$$c_1 = \int_{-1/2}^{1/2} s(\vartheta) \text{wal}(1, \vartheta) d\vartheta = -U \int_{-1/2}^0 (\vartheta + 1/2) d\vartheta + U \int_0^{1/2} (\vartheta + 1/2) d\vartheta = U/4.$$

მაშასადამე, მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის იმპულსის აპროქსიმაციისას უოლშის ფუნქციათა სისტემის პირველი ორი წევრის გამოყენებით მიიღება (იხ. ნახ. 142) საფეხუროვანი ფორმით მიახლო-



ნახ. 141



ნახ. 142

ებითი წარმოდგენა. უნდა აღინიშნოს, რომ ზემოთ მოყვანილი ენერგეტიკული ნორმით ასეთი აპროქსიმაცია უკვე არის დამაკმაყოფილი.

ნამდვილად, საწყისი სიგნალის ენერგიაა

$$E_s = U^2 \int_{-1/2}^{1/2} (9 + 1/2)^2 d\vartheta = U^3/3,$$

მაშინ როცა სხაობის ენერგია

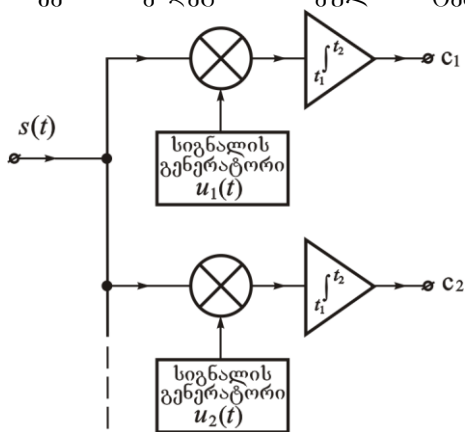
$$\|s(\vartheta) - c_0 \text{wal}(0, \vartheta) - c_1 \text{wal}(1, \vartheta)\|^2 = 4U^2 \int_0^{1/4} x^2 dx = U^2/48$$

შეადგენს მხოლოდ 1/16, ანუ აპროსიმირებული სიგნალის ენერგიის 6,25%.

14.4. სიბნალების ორტოგონალური დაშლის აპარატურული რეალიზაცია

განვიხილოთ ხელსაწყო სტრუქტურული სქემა, რომელიც ექსპერიმენტალური გზით ანალოგურ სიგნალს დაშლის ფურცელს განზოგადებული მწკრივად მოცემული ორტონორმირებული ბაზისური ფუნქციების სისტემის მიმართ (იხ. ნახ.143).

აქ ძირითადი ელემენტებია იმ ბაზისური ფუნქციების გენერატორები რომლის მიმართ ტარდება დაშლა. გასაანალიზებელი სიგნალი ერთდროულად მიეწოდება გამამრავლებელი რგოლების ერთობრიობას, ამ სიგნალის და შესაბამისი ბაზისურ ფუნქციებზე გასამრავლებად. მათ გამოსასვლებიდან სიგნალები მიეწოდება შესაბამის ინტეგრატორებს. სიგნალის ასეთი დამუშავების შემდეგ თითოეული ინტეგრატორის გამოსასვლელზე



მოთავსდება დროში უცვლელი დონე, რომლის სიდიდე (1.29) ფორმულის, შესაბამისად, ზუსტად უდრის განზოგადებული ფურცელს მწკრივის ამ თუ იმ კოეფიციენტს.

ნახ. 143

მოყვანილი სისტემა მნიშვნელოვანია თეორიულ და გამოყენებით თვალსაზრისით. მისი ანალიზის შედეგად ვრწმუნდებით, რომ სიგნალში

მოთავსებული სრული ინ-
ნახ. 143

წარმოვიდგინოთ მართლაც რომ უსასრულო, მაგრამ მაინც სასრული რიცხვების ერთობრიობით.

ფორმაცია, შესაძლებელია უსასრულო, მაგრამ მაინც