

ლექცია 4

თემა 2. სიგნალების სამატრალური წარმოდგენა

განსხვავებული სისტემების ორთოგონალური ფუნქციების შორის, რომლებიც შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს რადიო ტექნიკური სიგნალების ბაზისებათ, განსაკუთრებული აფილი უკავია ჰარმონიულ (სინუსოიდალურ და კოსინუსოიდალურ) ფუნქციებს. ჰარმონიული სიგნალების მნიშვნელობა განპირობებულია რიგი მიზეზებით. კერძოდ:

1. ჰარმონიული სიგნალები ინვარიანტულია გარდაქმნების მიმართ, რომლებსაც ანხორციელებს სტაციონარული ხაზოვანი ელექტრული წრედები. თუ ასეთი წრედი აღიბძნება გარმონიული რხევის წყაროს მეშვეობით, მაშინ სიგნალი წრედის გამოსავალზე რჩება ჰარმონიული იგივე სიხშირით, მაგრამ შესავალი სიგნალის მიმართ განსხვავებული მხოლოდ ამპლიტუდით და ფაზით.

2. გარმონიული სიგნალების გენერირების ტექნიკა შედარებით მარტივია.

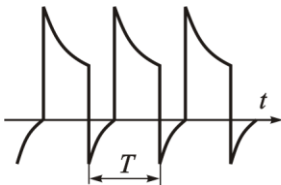
თუ რაიმე სიგნალი წარმოდგენილია განსხვავებული სიხშირის ჰარმონიული რხევების ჯამად, მაშინ ამბობენ, რომ განხორციელებულია ამ სიგნალის **სპექტრალური დაშლა**. ჰარმონიული სიგნალის ცალკეული კომპონენტები წარმოდგენენ მის სპექტრს.

2.1. პერიოდული სიგნალები

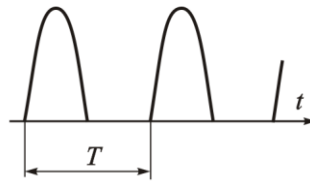
დროში განმეორებადი პროცესის მათემატიკური მოდელი არის პერიოდული სიგნალი $s(t)$ შემდეგი თვისებებით:

$$s(t) = s(t \pm nT), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

სადაც T - სიგნალის პერიოდია (იხ. ნახ. 2.1 და 2.2).



ნახ. 2.1



ნახ. 2.2

ამოცანა მდგომარეობს იმაში, რომ ვიპოვოთ ასეთი სიგნალის სპექტრული შლილი.

2.2. ფურიეს მწკრივი

დროის $[-T/2, T/2]$ მონაკვეთში შემოვიტანოთ ორტონორმირებული ბაზისი შედგენილი პარმონიული ფუნქციების ჯერადი სისშირეებით:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1/\sqrt{T}, & u_1 &= \sqrt{2/T} \sin 2\pi t / T, \\ u_2 &= \sqrt{2/T} \cos 2\pi t / T, & u_3 &= \sqrt{2/T} \sin 4\pi t / T \\ u_4 &= \sqrt{2/T} \cos 4\pi t / T, & u_5 &= \sqrt{2/T} \sin 6\pi t / T \\ &\dots & & \end{aligned} \quad (2.2)$$

ამ ბაზისიდან ნებისმიერი u_n აკმაყოფილებს პერიოდულობის (2.1) პირობას. ამიტომ, ამ ბაზისში $s(t)$ სიგნალის ორტონორმალური დაშლის შემდეგ, ანუ თუ გამოვითვლით კოეფიციენტებს

$$c_m = (s, u_m), \quad (2.3)$$

მივიღებთ სრეკტრულ დაშლას

$$s(t) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m(t), \quad (2.4)$$

რომელიც ჭეშმარიტია მტელ უსასრულო დროის ღერძე.

(2.4) სახის რიგს ეწოდება მოცემული სიგნალის **ფურიეს რიგი**. შემოვიტანოთ მიმდევრობის ძირითადი $\omega_1 = 2\pi/T$ სისშირე, რომელიც ქმნის პერიოდულ სიგნალს. დაშლის კოეფიციენტების გამოთვლისას (2.3) ფორმულის გამოყენებით, ფურიეს მწკრივის საშუალებით შეიძლება წარმოვიდგინოთ სხვადასხვა სისშირის მქონე პარმონიული, n -ს ჯერადი, რხევების ჯამის

$$\text{სახით:} \quad s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)) \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{სადაც:} \quad a_0 &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega_1 t) dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

ზოგად შემთხვევაში პერიოდული სიგნალი შეიცავს მუდმივ მდგენელს და პარმონიული რხევების – პარმონიკების უსასრულო კრებულს, რომელთა სისშირეები $\omega_n = n\omega_1$, $n = 0, 1, \dots$

მიმდევრობის ძირითადი სიხშირეები ω_1 სიხშირის ჯერადია. ლუწ სიგნალს გააჩნია მხოლოდ კოსინუსოიდალური, ხოლო კენტ სიგნალს - სინუსოიდალური მდგენელები.

თითოეული ჰარმონიკა შეიძლება აღიწეროს მისი ამპლიტუდით A_n და საწყისი ფაზით φ_n . მაშინ ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტები შეიძლება გამოვითვალოთ ფორმულებით:

$$a_n = A_n \cos \varphi_n$$

$$b_n = A_n \sin \varphi_n$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{b_n}{a_n},$$

ხოლო ფურიეს მწკრივის ექვივალენტური ფორმულა იქნება:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_1 t - \varphi_n), \quad (2.7)$$

რომელიც, ზოგჯერ, გამოსაყენებლად უფრო მოხერხებული არის.

2.3. სიბნალების სრულყოფილი წარმოდგენა

რადიოტექნიკაში ორთოგონალური ფუნქციების ბაზისად იღებენ ჰარმონიულ ფუნქციებს, რაც დაკავშირებულია მათი გენერაციის სიმარტივესთან, აგრეთვე იმასთან, რომ სიგნალები ინვარიანტულია გარდაქმნების მიმართ სტანდარტულ ელექტრულ წრედებში.

სიგნალის სრექტრული დაშლა – ესაა სიგნალის წარმოდგენა სხვადასხვა სიხშირიანი ჰარმონიული რხევების ჯამის სახით.

სიხშირული სპექტრი (ანუ სპექტრი) – ესაა სიგნალის ცალკეული ჰარმონიული კომპონენტების კრებული.

პერიოდული სიგნალის **სრექტრული დიაგრამა** – ესაა ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტების გრაფიკური გამოსახულება კონკრეტული სიგნალისათვის.

არსებობს პერიოდული სიგნალის ამპლიტუდური და ფაზური სრექტრული დიაგრამები. დიაგრამების ჰორიზონტალურ ღერძზე მასშტაბში გადაიზომება ჰარმონიკების სიხშირეები, ხოლო ვერტიკალურ ღერძზე – მათი ამპლიტუდები (იხ. ნახ. 2.3) ან საწყისი ფაზები (იხ. ნახ. 2.4).



ნახ. 2.3



ნახ. 2.4

მაგალითი 2.1. მართკუთხა ფორმის ვიდეომპულსის $s(t)$ პარამეტრებია τ_0, T, A . ფუნქცია ლუწია წერტილის $t=0$ მიმართ. იპოვეთ ფურიეს მწკრივი.

ამოხსნა: რადიოტექნიკაში თანაფარდობას $q = \frac{T}{\tau_0}$ უწოდებენ **იმპულს-**

თა სიმეჩხრე, სადაც T არის სიგნალებს შორის პერიოდი, ხოლო τ_0 იმპულსის ხანგრძლიობაა. (2.6) ფორმულების გამოყენებით ვპოულობთ

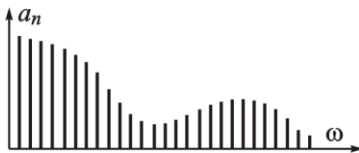
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} A dt = \frac{A}{q \cdot \tau_0} t \Big|_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} = \frac{A}{q},$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2A}{T} \int_{-\tau_0/2}^{\tau_0/2} \cos(n\omega_1 t) dt = \frac{2A}{T n \omega_1} \cdot 2 \sin \frac{n \omega_1 \tau_0}{2} = \\ &= \frac{2A}{\pi n} \sin \frac{n \omega_1 \tau_0}{2} \end{aligned}$$

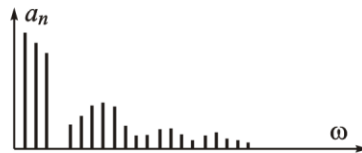
საბოლოოთ ფურიეს მწკრივის ჩაწერა მოხსახერხებელია შემდეგი (2.7) სახით, ანუ

$$s(t) = \frac{A}{q} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \cos(n\omega_1 t) \right].$$

ნახ. 2.5-2.6 –ზე მოყვანილია განხილული მიმდევრობების ამპლიტუდური დიაგრამები ორი კიდურა შემთხვევისთვის: ნახ. 2.5 – დიდი მნიშვნელობის სიმეჩხრის დროს, ხოლო ნახ. 2.6 – მცირე სიმეჩხრის დროს.



ნახ. 2.5



ნახ. 2.6

მნიშვნელოვანი აღინიშნოს, რომ მოკლე იმპულსები რომლებიც იშვიათად მიხედვენ ერთმანეთს ($q \ll 1$) ხასიათდებიან მდიდრული სპექტრული შემადგენლობით.

მაგალითი 2.1. პერიოდულად მიმდევრულ პარმონიულ სიგნალების იმპულსებს აქვს სახე $U_m \cos \omega_1 t$. სიგნალი (იხ. ნახ. 2.7) შეზღუდულია U_0 დონეზე (იგულისხმება, რომ $|U_0| < U_m$). იპოვეთ ფურიეს მწკრივი.

ამოხსნა: შემოვიტანოთ სპეციალური პარამეტრი - წაკვეთის კუთხე ϑ , რომელიც განი საზღვრება თანაფართობით $U_m \cos \vartheta = U_0$, საიდანაც

$$\vartheta = \arccos(U_0/U_m).$$

ამის შესაბამისად 2ϑ (იხ. ნახ. 2.7) უდრის ერთი იმპულსის ხანგრძლიობას, ანუ $\omega_1 \tau_0 = 2\vartheta$.

ანალიტიკურად იმპულსების ასეთი მიმდევრობას ექნება სახე

$$s(t) = U_m \cos \omega_1 t - U_0, \quad -\vartheta \leq \omega_1 t \leq \vartheta.$$

მიმდევრობის მუდმივი მდგენელი

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{T} \int_{-\vartheta/\omega_1}^{\vartheta/\omega_1} (U_m \cos \omega_1 t - U_0) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} (U_m \cos \omega_1 t - U_0) d(\omega_1 t) = \\ &= \frac{U_m}{\pi} (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta). \end{aligned}$$

პირველი პარმონიკის ამპლიტუდური კოეფიციენტი

$$a_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\vartheta}^{\vartheta} (U_m \cos \omega_1 t - U_0) \cos \omega_1 t d(\omega_1 t) = \frac{U_m}{\pi} (\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta).$$

ანალოგურად გამოითვლება a_n პარმონიული მდგენელები, რო-

ცა $n = 2, 3, \dots$:

$$a_n = \frac{2U_m}{\pi} \cdot \frac{\sin n\vartheta \cos \vartheta - n \cos n\vartheta \sin \vartheta}{n(n^2 - 1)}.$$

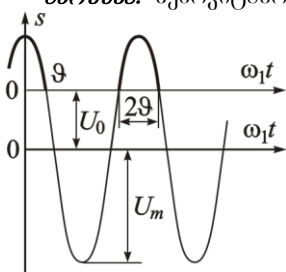
ჩვეულებრივ მიღებული რეზულტატები ჩაიწერება ასე:

$$a_0/2 = U_m \gamma_0(\vartheta); \quad a_n = U_m \gamma_n(\vartheta),$$

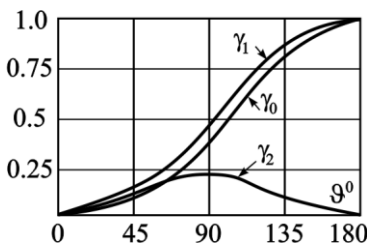
სადაც $\gamma_0(\vartheta), \gamma_1(\vartheta), \gamma_2(\vartheta), \dots$ -

ბერგის ფუნქციებად წოდებული

გამოსახულებებია: $\gamma_0 = \frac{1}{\pi} (\sin \vartheta - \vartheta \cos \vartheta), \quad \gamma_1 = \frac{1}{\pi} (\vartheta - \sin \vartheta \cos \vartheta),$



ნახ. 2.7



ნახ. 2.8

$$\gamma_n = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin n\vartheta \cos \vartheta - n \sin n\vartheta \cos \vartheta}{n(n^2 - 1)} \right), \quad \text{როცა } n = 2, 3, \dots$$

ბერგის ფუნქციების გრაფიკები მოყვანილია ნახ. 2.8 -ზე

2.4. ფურიეს მწკრივის კომპლექსური ფორმა

პერიოდული სიგნალის სრექტრული დაშლა შეიძლება მოხდეს საბაზისო ფუნქციების სისტემაში, რომლებიც შედგება კომპლექსურ მაჩვენებლებიანი ექსპონენტებისაგან წარმოსახვითი მაჩვენებლებით:

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{\exp(jk\omega_1 t)}{\sqrt{T}} \right\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.10)$$

ამ ბაზისის ფუნქციები პერიოდულია T პერიოდით და ორთონორმირებულია დროის მონაკვეთზე $[-T/2, T/2]$, ვინაიდან

$$(u_m, u_n) = \int_{-T/2}^{T/2} u_m u_n^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-n)x} dx = \begin{cases} 1 & \text{როცა } m = n \\ 0 & \text{როცა } m \neq n \end{cases}.$$

მაშინ, კომპლექსური სიგნალის ნორმის გათვალისწინებით, ნებისმიერი პერიოდული სიგნალის ფურიეს კომპლექსური მწკრივი მიიღებს სახეს

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t} \quad \text{კოეფიციენტებით} \quad c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt.$$

ჩვეულებრივ გამოიყენებენ შემდეგი ფორმით ჩაწერას:

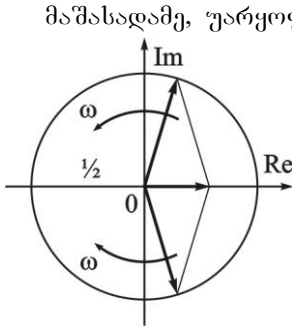
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t}, \quad (2.11)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt. \quad (2.12)$$

გამოსახულება (2.11) წარმოადგენს ფურიეს მწკრივს კომპლექსურ ფორმაში.

ფორმულის თანახმად სიგნალის სპექტრი შეიცავს კომპონენტებს სიხშირის უარყოფით ნახევარღერძზე, ამასთან $C_{-n} = C_n^*$. (2.11) რიგში შესაკრეფები უარყოფითი და დადებითი სიხშირეებით გაერთიანდებიან წყვილებად, მაგალითად:

$$\begin{aligned} C_n e^{jn\omega_1 t} + C_{-n} e^{-jn\omega_1 t} &= |C_n| e^{j(n\omega_1 t - \varphi_n)} + |C_n| e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = \\ &= 2|C_n| \cos(n\omega_1 t + \varphi_n) \end{aligned}$$



ნახ. 2.9

2.4. ფურიეს მჟგრივის ტრიგონომეტრიული ფორმა

გამოთვლებისას გასათვალისწინებელია ექსპონენციალური ფუნქციების კავშირი ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებთან

$$e^{-jn\omega_1 t} = \cos(n\omega_1 t) - j \cdot \sin(n\omega_1 t)$$

$$\cos(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} + e^{-jn\omega_1 t}}{2}$$

$$j \cdot \sin(n\omega_1 t) = \frac{e^{jn\omega_1 t} - e^{-jn\omega_1 t}}{2}$$

ექსპონენციალური წარმოდგენის შემთხვევაში სიგნალის სპექტრი შეიცავს ჰარმონიკებს სიხშირეთა ღერძის უარყოფით ღერძის არეზე. ამ დროს უნდა გავითვალისწინოთ, რომ უარყოფითი სიხშირე მათემატიკური და არა ფიზიკური ცნებაა, განპირობებული კომპლექსური რიცხვების წარმოდგენით.

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(k\omega_1 t - \varphi_k) dt = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(m\omega_1 t - \varphi_m) \cos(n\omega_1 t - \varphi_n) dt = 0,$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos(k\omega_1 t - \varphi_k) dt = 0,$$

სადაც m და n – მთელი რიცხვებია, რომლებიც წარმოადგენენ k რიცხვის კერძო მნიშვნელობებს, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ:

$$\frac{1}{T} \int_0^T [S(t)]^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$$

თუ ფუნქცია $S(t)$ წარმოადგენს, მაგალითად დენს ელექტრულ წრედში, მაშინ ეს გამოსახულება ჯოულ-ლენცის კანონის თანახმად, საშუალო სიმძლავრის პროპორციულია, რომელიც შთაინთქმება ამ წრედში. აქედან გამომდინარე, საშუალო სიმძლავრე წრედში, რომელშიც გადის დენი, წარმოადგენს დროის რთულ პერიოდულ ფუნქციას, ტოლია ყველა ჰარმონიკის საშუალო სიმძლავრეების ჯამს.

მიღებული გამოსახულების მარჯვენა ნაწილის ჯამი, წარმოადგენს უსასრულო მწკრივს. მაგრამ, რომელიმე ნომრიდან დაწყებული, ჰარმონიკების ამპლიტუდები იმდენად მცირეა, რომ შეიძლება მათი უგულებელყოფა და პრაქტიკულად რეალური პერიოდული პროცესი წარმოადგენს ფუნქციას შემოფარგლული სპექტრით. სისშირეთა ინტერვალს, რომელიც შეესაბამება შემოფარგლულ სპექტრს, ეწოდება **სპექტრის სიგანე**.

* სიგნალების სპექტრული ანალიზის მოკლედ გადმოცემული თეორია საშუალებას გვაძლევს გავაანალიზოთ სიგნალების გავლა რადიოტექნიკურ წრედებში, მოწყობილობებსა და სისტემებში.