ლექცია 2

1.4. გეომეტრიული მეთოდები სიგნალების თეორიაში

სიგნალების შედარების ჩასატერებლად მათი მსგავსობის დასადგენათ და სხვა ამოცანების გადასაჭრელად საჭიროა შესაბამისი მათემატიკური აპარატრის გამოყენება.

მე-XX საიკუნეში შეიქვნა ფუნქციონალური ანალიზი - მათემატიკის მიმართულება, რომელიც აერთიანებს ჩვენ ინტუიციურ წარმოდგენას სივრცის გეომეტრიულ სტრუქტურაზე. აღმოჩდა, რომ ფუნქციონალური ანალიზის იდეები იძლევა გამართული სიგნალების თეორიის შექნის საშუალებას, რომლის საფუძველში დევს სიგნალის კონცეპცია, როგორც ვექტორის, სპეციალური ხერხით კონსტრუირებულ უსასრულოგანზომილებიან სივრცეში.

ტერმინ „ხაზი“ ნაცვლად გამოიყენეთ „წრფე“---„წრფივი სივრცე“.

1.4.1. სიგნალების ხაზოვანი სივრცე (წრფივი სივრცე)

ვთქვათ $M=\{s_1(t), s_2(t), \ldots\}$ - სიგნალების სიმრავლეა. ამ ობიექტების გაერთიანების მიზეზია – საერთო თვისებების არსებობა M სიმრავლის ყველა ელემენტებისათვის.

მაგალითი 1.4. M სიმრავლე შექნილია სხვადსახვანაირი ანალოგური სიგნალებით, რომლებიც განსხვავებულია ნულიდან დროის ინტერვალში (0, 15 მკწმ). ამ ინტერვალის გარეთ სიგნალების მნიშვნელობები უდრის ნულს.

მაგალითი 1.5. M სიმრავლე შეიცავს $s_n = A_n \cos(\omega_0 t + \varphi_n)$ ჰარმონიული რხევების სახის სიგნალებს, რომლებიც განსხვავდებიან ამპლიტუდებით, სიხშირეებით და საწყის ფაზებით.

სიგნალების თვისებების შესწავლა, რომლებიც გაერთიანებულია ასეთ სიმრავლეში , მარტივდება იმ შემთხვევაში, როდესაც შესაძლებელია სიმრავლის ერთი ელემენტები გამოვსახოთ ამ სიმრავლის სხვა ელემენტებით. ამ შემთხვევაში მიღებულია გამონათქვამი, სიგნალების სიმრავლეს გააჩნია განსაზღვრული **სტრუქტურა**. სტრუქტურის ამორჩევა ნაკარნახევია ფიზიკური მოსაზრებებით. მაგალითად, ცნობილია, რომ ელექტრული რხევები შესაძლებელია არა მარტო შეიკრიბონ, არამეტ გამრავლდნენ ნებისმიერ მასშტაბურ კოეფიციენტზე. ეს იძლევა საშუალებას სიგნალების სიმრავლეში შემოვიტანოთ **ხაზოვანი სივრცის სტრუქტურა**.

სიგნალების M სიმრავლე ქმნის **ნამდვილ ხაზოვან სივრცეს,** თუ ჭეშმარიტია შემდეგი აქსიომები:

1. ნებისმიერი სიგნალი $u \in M$ ნებისმიერ t ღებულობს მხოლოდ ნამდვილ მნიშვნელობებს.
2. ნებისმიერი $u \in M$ და $\upsilon \in M$ არსებობს ჯამი $w = u + \upsilon$, ამასთან $w \in M$. შეკრების ოპერაცია კომუტაციურია: $u + \upsilon = \upsilon + u$ და ასოციური $u + (\upsilon + x) = (u + \upsilon) + x$.
3. ნებისმიერი სიგნალისთვის $s \in M$ და ნებისმიერი ნამდვილი α რიცხვისათვის განსაზღრული სიგნალი $f = \alpha \cdot s \in M$.
4. M სიმრავლე შეიცავს განსაკუთრებულ ნულოვან ელემენტს $\varnothing$, ისეთს, რომ $u + \varnothing = u$ ყველა $u \in M$.

(მოყვანილი აქსიომატიკა არ არის სრული და მას შეიძლება დაემატოს სხვა აქსიომები).

თუ სიგნალების მათემატიკური მოდელები იღებენ კომპლექსურ მნიშვნელობებს, მაშინ, თუ მე-3 აქსიომაში დაუშვებთ გამარავლებას კომპლექსურ რიცხვზე, მივდივართ **ხაზოვანი კომპლექსური სივრცის** ცნებასთან.

მოყვანილი აქსიომატიკა საკმაოთ მკაცრია. სიგნალების სიმრავლეები შესაძლოა აღმოჩდეს ხაზოვანი სიმრავლის მიღმა.

მაგალითი 1.6. M სიმრავლე შეიცავს განსხვავებული სახის ძაბვის მართკუთხა ვიდეოიმპულსებს, რომლებიც არსებობენ დროის (0, 20 მკწმ) ინტერვალში, ამასთან იმპულსების ამპლიტუდები არ აღემატება 10 ვ. არის თუ არა ხაზოვანი სივრცე თუ იმპულსების ამპლიტუდები უდრის 6 და 8 ვ ?

ამოხსნა: არა, ვინაიდან თუ იმპულსების ამპლიტუდებს შევკრეფთ, მივიღებთ სიგნალს, რომელიც არ მიეკუთვნება M სიმრავლეს. ამიტომ M არ არის ხაზოვანი სივრცე.

1.4.1. კოორდინატული ბაზისის ცნება

როგორც ჩვეულებრივ სამგანზომილებიან სივრცეში, ასევე სიგნალების ხაზოვან სივრცეში შესაძლებელია გამოვყოთ სპეციალური ქვესიმრავლე, რომელიც შეასრულებენ კოორდი-ნათთა ღერძების როლს.

ამბობენ, რომ ვექტორების ერთობრივობა $\{e_1, e_2, e_3, \ldots\}$, რომ-ლებიც მიეკუთვნება M, არის **ხაზოვნად დამოუკიდებელი** ტოლობა $\sum_i \alpha_i e_i = \varnothing$ შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც ყველა α_i კოეფიციენტები ერთდროულად განულდება.

ხაზოვნად დამოუკიდებელი ვექტორების სისტემა ხაზოვან სივრცეში ქმნის კოორდინატულ ბაზის **. თუ მოცემულია რაიმე**

„წრფივად დამოუკიდებელი".

სიგნალის $s(t)$ **დაშლა სახით** $s(t)=\sum_i c_i e_i$, **მაშინ რიცხვები** $\{c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ **არის** $s(t)$ **სიგნალის პროექციები ამორჩეული ბაზისის მიმართ.**

სიგნალების თეორის ამოცანებში ბაზისური ვექტორების რაოდენობა განუსაზღვრელად დიდია. ასეთ ხაზოვან სივრცეებს უწოდებენ **უსასრულოგანზომილებიან სივრცეს**. ბუნებრივია, რომ ამ სივრცეების თეორია არ შეიძლება მოთავსდეს ხაზოვანი ალგებრის ფორმალურ სქემაში, სადაც ბაზისური ვექტორების რიცხვი ყოველთვის სასრულია.

მაგალითი 1.7. ხაზობანი სივრცე შედგენილია სიგნალებით, რომლებიც აღიწერებიან მაღალი რიგის მრავალწევრებით: $s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n t^n$ (ასეთ ფუნქციებს ეწიდება **ანალიტიკური**).

ამ სივრცეში კოორდინათთა ბაზისი არის ერთწევრების სისტემა $\{e_0=1;\ e_1=t;\ e_2=t^2;\ \ldots\}$.

1.4.2. ნორმირებული ხაზოვანი სივრცე. სიგნალის ენერგია

სიგნალების თეორიის გეომეტრიული წრმოდგენის გასაღმა-ვებლად, აუცივლებელია შემოვიტანოთ ახალი ცნება, რომელიც აზრობრივად შეესაბამება **ვექტორის სიგრძეს.** ეს მოგვცემს საშუალებას სიგნალები შევადაროთ ერთმანეთს.

მათემატიკაში ვექტორის სიგრძეს უწოდებენ **ნორმა**-ს. სიგნალების ხაზოვანი სივრცე არის **ნორმირებული** თუ თითოეულ ვექტორს $s(t)\in L$ ცალსახათ შეესაბამება რიცვი$\|s\|$ – ამ ვექტორის ნორმა, ამასთან სრულდება ნორმირებული სივრცის შემდეგი აქსიომები:

1. ნორმა არ რის უარყოფითი, ანუ $\|s\|\geq 0$. ნორმა$\|s\|=0$ მაშინ და მხოლოთ მაშინ, თუ $s=\varnothing$.
2. ნებისმიერი α რიცხვისათვის ჭეშმარიტია ტოლობა $\|\alpha\cdot s\|=|\alpha|\cdot\|s\|$.
3. თუ $s(t)$ და $p(t)$- ორი ვექტორია L-დან, მაშინ სრულდება სამკუთხედის უტოლობა: $\|s+p\|\leq\|s\|+\|p\|$.

(ეს აქსიომატიკა გამოიყენება, როგორც ანალოგური ასევე დისკრეტული სიგნალებისათვის).

რადიოტექნიკაში მიღებულია, რომ ანალოგურ სიგნალების ნორმაა

$$\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\,\mathrm{d}t} \qquad (1.15)$$

(ფესვის ორი მნიშვნელობებიდან ირჩევსნ დადებითს). კომპლექსური სიგნალებისათვის ნორმა $\|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s(t)s^*(t)\,\mathrm{d}t}$,

სადაც * - სიმბოლით აღინიშნება კომპლექსურად შეუღლებული სიდიდე.

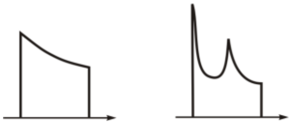
ნორმის კვადრატს უწოდებენ **სიგნალის ენერგია**

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t$$

ზუსტად ასეთი ენერგია გამოიყოფა 1 ომ რეზისტორში, თუ მის მომჭერებზე მოდებულია ძაბვა $s(t)$.

სიგნალის ნორმა მიზანშეწონილია გამოითვალოს ფორმულა (1.15) შემდეგი მიზეზების გამო:

1. რადიოტექნიკაში სიგნალის სიდიდეზე მსჯელობენ გამომდინარე ჯამური ენერგეტიკული ეფექტიდან, მაგალითად, რეზისტორში გამოყოფილი სითბოს რაოდენობა.
2. ენერგეტიკული ნორმა არამგძნობიარეა სიგნალის ფორმის ცვლილების მიმართ და შეიძლება იყოს მნიშვნელოვანი დროის მოკლე მონაკვეთებში.



ნახ. 1.27

(ნახ. 1.27–ზე მოყვანილია სიგნალები უმნიშვნელოდ განსხვავებული ენერგიებით).

ხაზოვანი ნორმირებული სივრცეს (1.15) სახის ნორმას ზღვრული მნიშვნელობით ეწოდება **ფუნქციების სივრცის ინტეგრირების კვადრატი** და მოკლედ აღინიშნება L_2

1.4.3. მეტრული სივრცე

შემოვიტანოთ ფუნდამენტალური ცნება, რომელიც აერთიანებს ჩვენ წარმოდგენას სივრცეში ორ წერტილებს შორის მანძილზე.

ამბობენ, რომ ხაზოვანი სივრცე L დგება მეტრულ სივრცეთ, თუ $u, \upsilon \in L$ ელემენტების თითოეულ წყვილს შეესაბამება არავარყოფითი $\rho(u, \upsilon)$ მეტრიკად წოდებული რიცხვი, ან მანძილი ამ ელემენტებს შორის.

მეტრიკის განსაზღვრის ხერხის მიუხედავად, მეტრიკა უნდა დაექვემდებარებოდეს მეტრული სივრცის აქსიომებს:

1. $\rho(u, \upsilon) = \rho(\upsilon, u)$ (მეტრიკის რეფლექსიობა);
2. $\rho(u, u) = 0$ ნებისმიერი $u \in L$;
3. როგორიც არ უნდა იყვეს ელემენტი $w \in L$, ყოველთვის $\rho(u, \upsilon) \le \rho(u, w) + \rho(w, \upsilon)$.

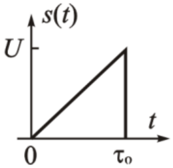
ჩვეულებრივ მეტრიკა განისაზღვრება როგორც ორი სიგნა-ლის ნორმა:

$$\rho(u, \upsilon) = \|u - \upsilon\| . \qquad (1.17)$$

ნორმის ქვეშ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ მანძილი სივრცეში ამორჩეულ ელემენტსა და ნულოვან ელემენს შორის: $\|u\| = \rho(u, \varnothing)$.

მეტრიკის ცოდნით, შეიძლება ვიმსჯელოთ, მაგალითად, მასზე თუ რამდენათ კარგათ ერთი სიგნალი აპროქსიმირებს მეორეს.

მაგალითი 1.8. სიგნალი $s(t)$ წარმოადგენს ძაბვის სამკუთხა იმპულს U ამპლიტუდით და ხანგძლიობით τ_o (ნახ. 1.28). გამოთვალეთ ასეთი სიგნალის ენერგია და ნორმა.



ნახ. 1.28

ამოხსნა: დროის $(0, \tau_\text{o})$ ინტერვალში სიგნალი აღიწერება ფუნქციით

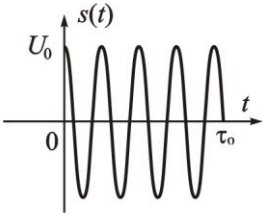
$$s(t) = Ut / \tau_\text{o} .$$

სიგნალის ენერგია გამოითვლება (1.16) გამოსახულებით $E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)\mathrm{d}t$. ინტეგრირების ზღვების შეცვლით და ინტეგრალიდან მუდმივი სიდიდეების გამოტანის შემდეგ მივიღებთ

$$E_s = \left(\frac{U^2}{\tau_\text{o}^2}\right)\int_0^{\tau_\text{o}} t^2\mathrm{d}t = \frac{U^2}{\tau_\text{o}^2}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\tau_\text{o}} = U^2\cdot\frac{\tau_\text{o}}{3} .$$

სიგნალის ნორმა $\|s\| = \sqrt{E_s} = U\,\dfrac{\sqrt{\tau_\text{o}}}{\sqrt{3}}$.

მაგალითი 1.9. გამოთვალეთ რადიოიმპულსის ენერგია მართკუთხა ფორმის მქონე მოვლებით. იმპულსი არსებობს $(0, \tau_\text{o})$ ინტერვალში და აღიწერება ფუნქციით $s(t) = U_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ (იხ. ნახ. 1.29)



ამოხსნა: ფორმულა (1.16) გამოყენებით $E_s=\|s\|^2=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s^2(t)\mathrm{d}t$, ინტეგრირების ზღვების ნახ. 1.29 შეცვლით და ინტეგრალიდან მუდმივი სიდიდეების გამოტანის შემდეგ მივიღებთ

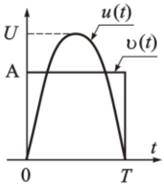
$$E_s=U_0^2\int\limits_0^{\tau_o}\cos^2\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)\mathrm{d}t=\frac{U_0^2}{\omega_0}\int\limits_0^{\omega_0\tau_o+\varphi_0}\cos^2 x\,\mathrm{d}x\,.$$

ინტეგრირების შესრულების შემდეგ მივიღებთ

$$E_s=U_0^2\int\limits_0^{\tau_o}\cos^2\left(\omega_0 t+\varphi_0\right)\mathrm{d}t=\frac{U_0^2}{4\omega_0}\left[2\left(\omega_0\tau_o+\varphi_0\right)+\sin 2\left(\omega_0\tau_o+\varphi_0\right)\right].$$

თუ რადიოიმპულსი შეიცავს ისეთ მაღალსიხშირულ შევსების ელექტრომაგნიტურ რხევებს, რომ $\omega_0\tau_o \gg 1$, მაშინ $E_s\approx\dfrac{U_0^2\tau_o}{2}$ პარამეტრების ω_0 და φ_0 არჩევის მიუხედავათ.

მაგალითი 1.10. $u(t)$ სიგნალი წარმოადგენს სინუსოიდის მონაკვეთს, რომელიც მონაკვეთის $[0,T]$ ბოლოებში ღებულობს ნულოვან მნიშვნელობებს. იმპულსის სიმაღლე U ცნობილია. ამოირჩიეთ მართკუთხა ფორმის იგივე ხანგძლიობის იმპულსის ამპლიტუდა A ისე, რომ მანძილი ამ ორივე სიგნალებს შორის იყოს მინიმალური (იხ. ნახ. 1.30)



ნახ. 1.30

ამოხსნა: ვინაიდან სინუსოიდალური ფორმის $u(t)$ სიგნალის პერიოდი ამ შემთხვევაში იქნება $2T$, მაშინ მივიღებთ

$$u(t)=U\sin\omega t=U\sin\frac{2\pi}{2T}t=U\sin\frac{\pi t}{T},\quad 0\le t\le T\,.$$

სიგნალებს $u(t)$ და $\upsilon(t)$ შორის მანძილის კვადრატი გამოითვლება ფორმულით $\rho^2(u,\upsilon)=\int\limits_0^T\left(U\sin\dfrac{\pi t}{T}-\mathrm{A}\right)^2\mathrm{d}t\,.$

ინტეგრირების ჩატარების შემდეგ, მივიღებთ

$$\rho^2(u,\upsilon)=U^2\,T/2-4\mathrm{A}U\,T/\pi+\mathrm{A}^2T\,.$$

მიღებული ფუნქციიდან თუ ავიღებთ მეორ წარმოებულს დავრწმუნდებით, რომ ის დადებითია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ექსტრემუმის წერტილში ნამდვილად მიიღწევა მინიმუმი.

მაშასადამე, ავიღოთ პირველი წარმოებული A ცვლადის მიმართ და გაუტოლოთ ნულს. მივიღებთ, რომ მანძილის მინიმუმი მიიღწევა თუ $A = 2U/\pi \approx 0,637U$. მაშინ,

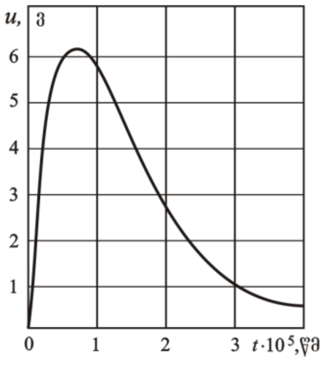
$$\rho_{\min}^2 = U^2 T\left(1/2 - 4/\pi^2\right) \approx 0,095U^2 T \quad \Rightarrow \quad \rho_{\min} \approx 0,308\, U\sqrt{T} .$$

ამ შემთხვევაში სინუსოიდალური იმპულსის ენერგია

$$E_{\text{o}} = U^2 \int_0^T \sin^2 \frac{\pi t}{T} \mathrm{d}t = \frac{U^2 T}{2} ,\ \text{მისი ნორმა}\ \|u\| = 0,707U\sqrt{T} .$$

მაშასადმე, ამორჩეული მეტრიკით მინიმალურად მისაღწევი მანძილი განხილულ სიგნალებს შორის შეადგენს 44% სინუსოიდალური იმპულსის ნორმიდან.

ამოცანა იმპულსური $u(t)$ სიგნალი ძაბვის განზომილებით (ვ), აღიწერება ფორმულით $u(t) = 25\left[\exp\left(-10^5 t\right) - \exp\left(-2\cdot 10^5 t\right)\right]\sigma(t)$, ააგეთ მოცემული იმპულსის გრაფიკი. განსაზღვრეთ სიგნალის მაქსიმალური მნიშვნელობა $u_{\max}$, და მაქსიმუმის მიღწევის დრო $t_{\max}$. გამოთვალეთ იმპულსის ხანგძლიობა, როგორც დროის მონაკვეთის სიგრძე იმ მომენტამდე როდესაც სიგნალის მყისიერი მნიშვნელობა შემცირდება 10 ჯერ მაქსიმალურ მნიშვნელობასთან შედარებით.



ნახ. 1.31

ამოხსნა. პირობიდან $u'\left(t_{\max}\right) = 0$ მივიღებთ განტოლებას $t_{\max}$ განსაზღვრისათვის:

$$-\exp\left(-10^5 t_{\max}\right) + 2\exp\left(-2\cdot 10^5 t_{\max}\right) = 0$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $10^5 t_{\max} = -\ln(1/2)$, ანუ $t_{\max} = 6,931\cdot 10^{-6}$წმ, მაშინ $u_{\max} = 6,25$ვ.

ვინაიდან იმპულსის მაქსიმალური მნიშვნელობის 10-ჯერ შემცირებული ამპლიტუდა არის საძიებელი იმპულსის ხანგძლიობა, ამიტომ მისი მნიშვნელობა განისაზღვრება განტოლებიდან

$$\exp\left(-10^5 \tau_{\text{o}}\right) - 2\exp\left(-2\cdot 10^5 \tau_{\text{o}}\right) = \frac{1}{10}\cdot\frac{6,25}{25} = 0.025 .$$

შემოვიტანოდ აღნიშვნა $x = 10^5 \tau_{\text{o}}$, მაშინ $\exp(-x) - 2\exp(-2\cdot x) = 0.025.$

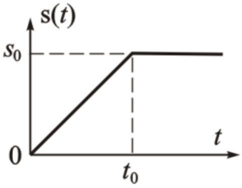
აქედან მივიღებთ ტრანსიდენტულ განტოლებას $x = -\ln\left(0.025 + e^{-2x}\right)$, რომელიც ამოიხსნება გამოთვლის მიახლოვების ხერხით. გრაფიკიდან აირჩევა საწყისი მიახლოვებითი მნიშვნელობა , მაგალითად $x_0 = 3$, და

შემდეგ გამოთვლებით ზუსტდება ამონახსნი. საბოლოთ მიახლოვებით მივიღებთ $x \cong 3.66$. ამ რეზულტატის გათვალისწინებით

$$\tau_{\text{ი}} = 3.66 \times 10^{-5} \text{წმ} = 36.6 \text{ მკწმ}.$$

ამ გაანგარიშებით ავაგოთ დაზუსტებული გრაფიკი (ნახ. 1.31).

ამოცანა. $s(t)$ სიგნალს აქვს (ნახ. 1.32) შემდეგი სახის მათემატიკური მოდელი:

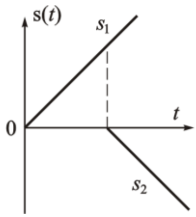


ნახ. 1.32

$$s(t) = \begin{cases} 0 & ,\ t < 0, \\ s_0 (t/t_0), & 0 \le t \le t_0, \\ s_0 & ,\ t > t_0. \end{cases}$$

წარმოიდგინეთ მოცემული დამოკიდებულება მონაკვეთ-ხაზოვანი ფუნქციების ჯამად.

ამოხსნა. $s(t)$ სიგნალი შეიძლება წარმოვიდგინოთ როგორც ორი ხაზოვანად ზრდადი ფუნქციების ჯამი (ნახ. 1.32) ერთნაირი სიდიდით, მაგრამ ნიშნით განსხვავებული დახრის კუთხური კოეფიციენტებით. აქედან



$$s(t) = (s_0/t_0) t\sigma(t) - (s_0/t_0)(t - t_0)\sigma(t - t_0).$$

ნახ. 1.33