ლექცია 1

შესავალი

ტერმინი "სიგნალი" ხშირად გვხდება არამარტო ტექნიკურ ლიტერატურაში, არამედ ყოველდღიურ ცხოვრებაში. ზოგჯერ არც ვაკვირდებით ტერმინოლოგიის სიმკაცრეს და ვაიგივებთ ისეთ ცნებებს, როგორიცაა ***სიგნალი, შეტყობინება, ინფორმაცია***. ჩვეულებრივ ეს არ იწვევს გაურკვევლობას ვინაიდან მოიცავს ფართო აზრობრივ დიაპაზონს.

ტერმინი "სიგნალი" წარმოიშვა ლათინური სიტყვიდან «signum» - "ნიშანი" და წარმოადგენს ფიზიკურ პროცესს, რომელიც იცვლება დროში გადასაცემი შეტყობინების კანონით.

სიგნალების თეორიის კურსის შესასწავლად დავაზუსტდოთ "***სიგნალი***" -ს ცნების მნიშვნელობითი აზრი. ტრადიციდან გამო მდინარე ზოგადად მიღებულია, რომ ***სიგნალი*** ეწოდება დროში რაიმე ობიექტის ფიზიკური მდგომარეობის ცვლილებას, რომელიც გამოიყენება შეტყობინების ასახვის, რეგისტრაციის და გადაცემისათვის.

ცნობილი და შეიძლება ითქვას ნებისმიერი სახის სისტემებში **სიგნალი** - ინფორმაციის გადაცემის ძირითადი საშუალებაა და ამიტომ ცხადია, რომ მნიშვნელოვანია მისი გამოყენების თეორიის შესწავლა.

ვინაიდან საკითხები, რომლებიც ეხება გადაცემული სიგნალის ფიზიკურ სახეს (მაგალითად, გეომეტრიული ფორმა) და მასში ჩადებულ **შეტყობინებას** და **ინფორმაციას,** რომლებსაც გააჩნია ფრიად მნიშვნელოვანი არა მარტო აზრობრივი დატვირთვა, არამეტ მასში ჩადებული ინფორმაციის ფასეულობებთან დაკავშირებული საკითხები ამ კურსში არ განიხილება. ეს საკითხები არის სხვა კურსების შესწავლის სფერო.

სასწავლო კურსის მიზანია:

ანალოგური და დისკრეტული სიგნალების აღწერისა და ანალიზის დაუფლება:

- სიგნალების ფურიე-ანალიზის ათვისება
- ციფრული სიგნალების დამუშავების მეთოდების ათვისება
- ფილტრების დიზაინისა და ანალიზის მეთოდების შესწავლა

საბაზო CAD სისტემის გამოყენების ათვისება (SPICE, PSPICE)

1. რადიოტექნიკური სიგნალები

სიგნალების თეორიული შესწავლისა და ანგარიშისათვის იქმნება გამოსაკვლევი სიგნალის **მათემატიკური მოდელი** (მმ), რაც საშუალებას იძლევა შედარდეს სიგნალები ერთმანეთს, გამოიყოს მათი ძირითადი თვისებები, მოვახდინოთ კლასიფიკაცია და რაც ძალზე მნიშვნელოვანია, დავადგინოთ გარკვეული ტერმინოლოგია.

1.1. სიგნალების აღწერა მათემატიკური მოდელებით

სიგნალები, როგორც ფიზიკური პროცესები შესაძლებელია შევისწავლოთ ხელსაწყოების გამოყენებით – ელექტრონული ოსცილოგრაფით, ვოლტმეტრით, მიმღებებით. ასეთ ემპირიულ მეთოდს აქვს მნიშვნელოვანი ნაკლი. ექსპერიმენტით დამკვირვებელი ახდენს დაკვირვებას მხოლოდ ცალკეულ მოვლენაზე. მსჯელობა ფუნდამენტულ თვისებებზე, რეზულტატების წინასწარმეტყველება შეცვლილ პირობებში შესაძლებელია მხოლოდ გამოსაკვლევი სიგნალების მათემატიკური მოდელის (მმ)შექნის შემდეგ.

სიგნალის მმ შესაძლებელია იყოს, მაგალითად, ფუნქციური დამოკიდებულება, რომლის არგუმენტი არის დრო

$s(t),\ u(t),\ f(t)$ და ასე შემდეგ.

მოდელის შექნა პირველი ნაბიჯია მოვლენის თვისებების სისტემატიური შესწავლისათვის. რადიოტექნიკაში ერთი და იგივე მმ თანაბარ წარმატების აღწერს დენს, ძაბვას, ელექტრომაგნიტური ველის დაძაბულობას და სხვა სიდიდეებს.

უმეტეს შემთხვევაში ძნელია მმ ზუსტი ამორჩევა. ამიტომ მმ დიდი რაოდენობიდან უნდა ამოირჩეს ის მმ, რომელიც ყველაზე მარტივად აღწერს ფიზიკურ პროცესს. ანუ მმ შერჩევა შემოქმედებითი პროცესია.

ფუნქციები, რომლებიც აღწერენ **სიგნალებს**, შეუძლიათ მიიღონ როგორც **ნამდვილი** ასევე **კომპლექსური** მნიშვნელობები. ამიტომ ხშირად გამოვიყენებთ როგორც ნამდვილი ასევე კომპლექსური სიგნალების ტერმინოლოგიას იმის და მიხედვით თუ რომრლია მათემატიკერად ხელსაყრელი.

მმ ცოდნა გვაძლევს საშუალებას ერთმანეთს შევადაროთ სიგნალები, დავადგინოთ მათი იგივეობა და განსხვავება, ჩავატაროთ კლასიფიკაცია.

1.2. რადიოტექნიკური სიგნალების კლასიფიკაცია

განვიხილოთ სიგნალის წარმოდგენის და ანალიზის მეთოდები.

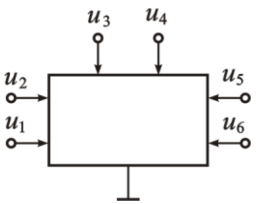
1.2.1. ერთგანზომილებიანი და მრავალგანზომილებიანი სიგნალები

რადიოტექნიკისათვის ტიპიური სიგნალი არის ძაბვა რაიმე წრედში ან დენი შტოში. ასეთი სიგნალს, რომელიც აღიწერება ერთი დროის ფუნქციით, ეწოდება **ერთგანზომილებიანი**. ზოგჯერ განსახილველად ხელსაყრელია შემოვიტანოთ **მრა-ვალგანზობილებიანი**, ანუ **ვექტორული**, სიგნალები სახით

$$\vec{V}(t)=\{\upsilon_1(t),\,\upsilon_2(t),\,...,\upsilon_N(t)\},$$

რომელიც შეიქვნება რაიმე ერთგანზომილებიანი სიგნალების სიმრავლით. მთელი რიცხვი N არის სიგნალის **განზომილება.**

მრავალგანზობილებიანი სიგნალის მაგალითად შეიძლება იყოს ძაბვების სისტემა მრავალპოლუსას მომჭერებზე. მრავალ-განზომილებიანი სიგნალის მოდელი მოყვანილია ნახ. 1.1.



ნახ. 1.1.

აღსანიშნავია, რომ მრავალგანზომილე-ბიანი სიგნალი – ერთგანზომილებიანი სიგნალების მოწესრიგებული ერთობლი-ობაა. ამიტომ ზოგად შემთხვევაში, სიგნა-ლები კომპონენტების განსხვავებული მიმდევრობით არ უდრის ერთმანეთს:

$$\{\upsilon_1,\upsilon_2\}\neq\{\upsilon_2,\upsilon_1\}.$$

სიგნალების მრავალგანზომილებიანი მოდელები გაცილებით სასარგებლოა იმ შემთხვევებში, როდესაც რთული სისტემების ფუნქციონირება ანალიზდება **ეგმ**-ის გამოყენებით.

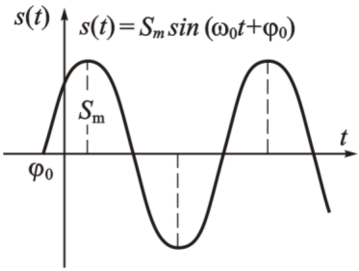
1.2.2. დეტერმინირებული და შემთხვევითი სიგნალები

დეტერმინირებული სიგნალი – ესაა სიგნალი, რომლის მყისიერი მნიშვნელობა დროის ნებისმიერ მომენტში შეიძლება ივარაუდოს ერთის ტოლი ალბათობით.

დეტერმინირებული სიგნალის მაგალითია: იმპულსების თანმიმდებრობანი (რომელთა ფორმა, ამპლიტუდა და დროის მიხედვით მდგომარეობა ცნობილია), უწყვეტი სიგნალები მოცემული ამპლიტუდურ-ფაზური თანაფარდობებით.

სიგნალის მმ-ის მოცემის ხერხებია: ანალიზური გამოსახუ-ლება (ფორმულა), ოსცილოგრამა, სპექტრალური წარმოდგენა. დეტერმინირებული (ჰარმონიული) სინუსოიდალური სიგნალის მმ-ის მაგალითი (იხ. ნახ. 1.2.):

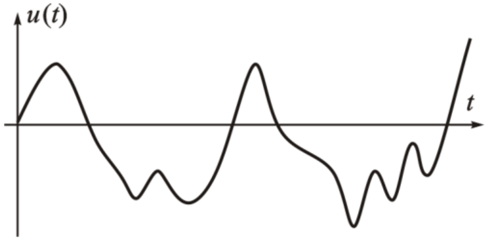
$$s(t)=S_m\sin(\omega_0 t+\varphi_0)$$



ნახ. 1.2.

შემთხვევითი სიგნალი – ესაა სიგნალი, რომლის მყისიერი მნიშვნელობა დროის ნებისმიერ მომენტში წინასწარ არ არის ცნობილი, მაგრამ შეიძლება ნავარაუდევი იყოს რაღაც ალბათობით, რომელიც ერთზე ნაკლებია.

შემთხვევითი პროცესის (ნახ. 1.3.) მაგალითი შეიძლება იყოს ძაბვა, რომელიც შეესაბამება ადამიანის მეტყველებას, მუსიკას, რადიოიმპულსების მიმდევრობა რადიოლოკაციური მიმღების შესასვლელზე, ხელშეშლები, ხმაური.



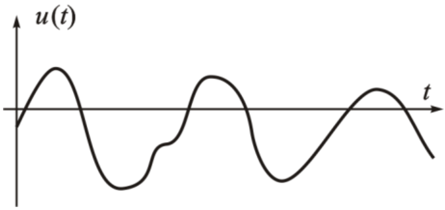
ნახ. 1.3.

1.2.3. ანალოგური, დისკრეტული და ციფრული სიგნალები

თავდაპირველად რადიოტექნიკაში გამოიყენებოდა მხოლოდ ანლოგიური სიგნალები. ასეთი სიგნალები გამოიყენებოდა უბრალო ტექნიკური ამოცანების გადასაწყვეტად (რადიოკავშირი, ტელეხედვა და სხვა). მარტივი იყო ანალოგური სიგნალის გენერირება, მიღება და დამუშავება.

სიდიდის (დონის) მიხედვით უწყვეტი და დროის მიხედვით უწყვეტი (უწყვეტი *ანუ* ***ანალოგური) სიგნალები*** $u(t)$-ღებულობენ ნებისმიერ მნიშვნელობას და არსებობენ დროის მოცემული ინტერვალის ნებისმიერ მომენტში (ნახ. 1.4).

ტერმინი ***ანალოგური სიგნალი*** ხაზს უსვამს იმას, რომ სიგნალი მისი შემქმნელ ფიზიკური პროცესის ანალოგიურია

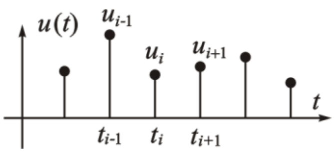


ნახ. 1.4

რადიოტექნიკური სისტემების მიმართ გაზრდილმა მოთხოვნებებმა გამოიწვია ახალი გზების პოვნა. ზოგ შემთხვევაში ანალოგურ სიგნალებს ჩაენაცვლენ იმპულსური სიგნალები

სიდიდის მიხედვით უწყვეტი და დროის მიხედვით დისკრეტული სიგნალები მოცემულია დროის დისკრეტულ მნიშვნელობებში (წერტილთა სასრულ სიმრავლეზე) (ნახ. 1.5). ამ წერტილებში სიგნალის მნიშვნელობა $u(t)$ ღებულობს ნებისმიერ მნიშვნელობას ორდინატთა ღერძის განსაზღვრულ ინტერვალზე.

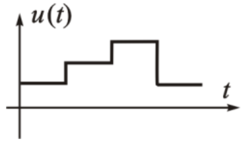
ტერმინი “**დისკრეტული**” ახასიათებს სიგნალის მოცემის ხერხს დროის ღერძზე. დისკრეტული სიგნალის მოდელი მოყვანილია ნახ. 1.5.-ზე. მისი უმარტივესი მათემატიკური მოდელი არის $u_{დ}(t)$. ანუ დროის ღერძზე სასრული რაოდენობის $\{t_i\}$ წერტილების სიმრავლის შესაბამისი მნიშვნელობები, რომლებშიც განსაზღვრულია მისი u_i მნიშვნელობა. როგორც წესი დისკრედიტაციის ბიჯი $\Delta = t_{i+1} - t_i$ ყოველი სიგნალისათვის მუდმივი სიდიდეა.



ნახ. 1.5

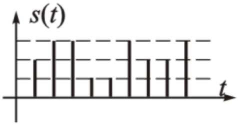
დისკრეტული სიგნალების ერთერთი უპირატესობა სიგნალის უწყვეტად ასახვის აუცივლობის გამორიცხვაა. ეს კი იძლევა შესაძლებლობას ერთიდაიგივე რადიოარხით გადავცეთ შეტყობინობა სხვადასხვა წყაროებიდან. ამით შესაძლებელია არხების დროით დაყოფის მეშვეობით მრავალარხიანი კავშირის ორგანიზება.

სიდიდის მიხედვით დაქვანტული და დროის მიხედვით უწყვეტი სიგნალები (ნახ. 1.6) მოცემულია მთელ დროის ღერძზე, მაგრამ სიდიდე $u(t)$-ს შეუძლია მიიღოს მხოლოდ დისკრეტული (დაქვანტული) მნიშვნელობები



ნახ. 1.6

სიდიდის მიხედვით დაქვანტული და დროის მიხედვით დისკრეტული (ციფრული) სიგნალები (ნახ. 1.7) გადასცემენ სიგნალის დონეების მნიშვნელობებს ციფრული ფორმით.

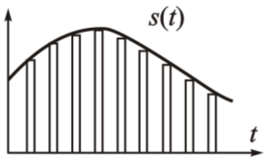


. . . . . .
111001011
101110010
010011100
100110011
. . . . . .
. . . . . .

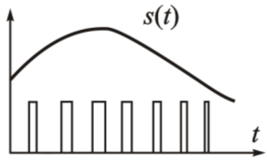
ნახ. 1.7 ნახ. 1.8 ნახ. 1.9

ტექნიკური რეალიზაციის გამარტივების თვალსაზრისით ჩვეულებრივ იყენებენ ორობით კოდს, როგორც წესი, განსაზღვრული თანრიგების რიცხვით (ნახ. 1.8). ბოლო დროს, მიკროელექტრონიკის და ინტეგრალური სქემოტექნიკის მიღწევების გამოყენებით ინერგება სისტემები ციფრული სიგნალების გამოყენებით რომლებიც შედგებიან 0 და 1 – ს შემცველი სიგნალებით (ნახ. 1.9).

მხედველობაში უნდა ვქონდეს, რომ ფიზიკური პროცესის ნებისმიერი დისკრეტული ან ციფრული სიგნალები არის ანალოგური სიგნალი. მაგალითად, ნელა ცვლადი ანალოგური სიგნალს შეგვიძლია შეუსაბამოდ დისკრეტული, ერთნაირი ხანგძლიობის მქონე, მართკუთხა ფორმის ვიდეოიმპულსი. ამ იმპულსების სიმაღლე პროპორციულია აღრიცხვის წერტილებში აღებული მნიშვნელობების (იხ. ნახ. 1.10). მაგრამ, შეგვიძლია სხვა გვარად მოვიქცეთ, იმპულსის სიმაღლე დავტოვოთ უცვლელი, ხოლო მისი ხანგძლიობა მცვალოთ შესაბამის ათვლით წერტილებში (იხ. ნახ. 1.11).



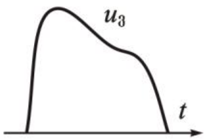
ნახ. 1.10.



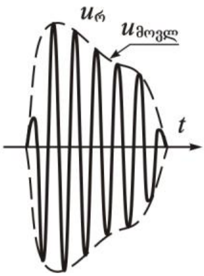
ნახ.1.11.

1.2.4. იმპულსური სიგნალები

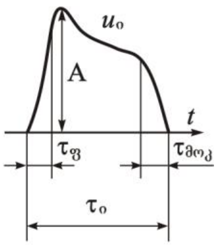
იმპულსი – ესაა რხევა, რომელიც არსებობს მხოლოდ დროის სასრული მონაკვეთის საზღვრებში. ამასთან განასხვავებენ ***ვიდეოიმპულსები*** და ***რადიოიმპულსები***. განსხვავება მდგომარეობს შემდეგში. თუ $u_{\text{ვ}}(t)$ (ნახ. 1.12) – ვიდეოიმპულსია, მაშინ მისი შესაბამისი რადიოიმპულსი (ნახ. 1.13) $u_{\text{რ}}(t)=u_{\text{ვ}}(t)cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ სადაც **სიხშირე** ω_0 და **საწყისი ფაზა** φ_0 - ნებისმიერია. ამასთან $u_{\text{ვ}}(t)$ ეწოდება რადიოიმპულსის **მომვლები**, ხოლო $cos(\omega_0 t+\varphi_0)$ ფუნქციას – მისი **შევსები**.



ნახ. 1.12.



ნახ. 1.13.



ნახ. 1.14.

ტრაპეციოდალური ვიდეოიმპულსისათვის (ნახ. 1.14.) შემოტანილია რიცხული პარამეტრები:

A – ამპლიტუდა;

$\tau_{\text{ი}}$ – ვიდეოიმპულსის ხანგრძლივობა;

$\tau_{\text{ფ}}$ – ფრონტის ხანგრძლივობა;

$\tau_{\text{მოკ}}$ – მოკვეთის ხანგრძლივობა.

1.3. სიგნალების დინამიური წარმოდგენა

რადიოტექნიკის ბევრი ამოცენები, მაგალითად ფიზიკურ სისტემაზე ზემოქმედების გამოძახილის გამოთვლას, მოითხოვენ სიგნალის სპეციფიურ წარმოდგენას. აუცილებელია არა მარ-

ტო ფლობდე ინფორმაციას სიგნალის მყისიერ მნიშვნელობაზე, არამეტ იცოდე მისი ყოფაქცევა მთელ დროის ღერძზე როგორც "წარსულში" ასევე "მომავალში".

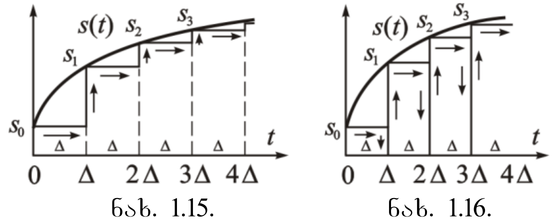
1.3.1. დინამიური წარმოდგენის პრინციპი

ასეთი მოდელების წარმოდგენის ხერხი შედგება შემდეგში. რეალური სიგნალი მიახლოვებით უნდა წარმოვიდგინოთ რაიმე ელემენტარული სიგნალების ჯამათ, რომლებიც წარმოიქვნება დროის მომდევნო მომენტებში. ამის შემდეგ ცალკეული ელემენტარული სიგნალების ხანგძლიობები მივასტრაფოთ ნულისაკენ, მაშინ, ბუნებრივია, ზღვარში მივიღებთ საწყისი სიგნალის ზუსტ წარმოდგენას. სიგნალების წარმოდგენის ასეთ ხერხს ეწოდება **დინამიური წარმოდგენა**, ამით ხაზი გაესმევა პროცესის დროში განვითარებას.

დინამიური წარმოდგენის ორმა ხერხმა ჰოვა ფართო გამოყენება. პირველის თანახმად ელემეტნარულ სიგნალებათ გამოიყენება საფეხუროვანი ფუნქციები, რომლებიც შეიქვნებიან დროის ტოლ Δ შვალედების შემდეგ (იხ. ნახ. 1.15). თითოეული საფეხურის სიმაღლე უდრის სიგნალის ნაზრდს დროის Δ ინტერვალში.

მეორე ხერხის მიხედვით ელემენტარულ სიგნალებს წარმოადგენენ მართკუთხა იმპულსები. ეს იმპულსები უშვალოდ მიედებიან ერთმანეთს და ქმნიან მიმდევრობას რომელიც ჩაწერილია მრუდში ან მასზე შემოწერილია (იხ. ნახ. 1.16).

ნახ. 1.15 და 1.16 ისრებით ნაჩვენებია ცალკეული ელემენტარული შესაკრეფების ცვლილებების გზები.

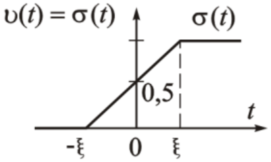


ნახ. 1.15. ნახ. 1.16.

განვიხილოთ ელემენტარული სიგნალი, რომელიც გამოიყენება დინამიური წარმოდგენისათვის პირველი ხერხით (ნახ. 1.15.).

1.3.2. დინამიური წარმოდგენის პირველი ხერხი (ჩართვის ფუნქცია)

ვთქვათ მოცემულია სიგნალი, რომლის მათემატიკური მოდელი აღიწერება ტოლობათა სისტემით:

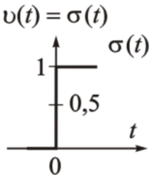


$$\upsilon(t)=\sigma(t)=\begin{cases}0, & t<-\xi,\\ 0.5, & -\xi\le t\le\xi,\\ 1, & t>\xi.\end{cases}$$

ნახ. 1.17

მოცემული ფუნქცია აღწერს რაიმე ფიზიკური ობიექტის “ნულოვანიდან” “ერთეულოვან” მდგომარეობაში გადასვლის პროცესს (იხ. ნახ. 1.17). გადასვლა წარმოებს ხაზოვანი კანონით.

ეს გადასვლა ხდება მყისიერად თუ $|\xi|\to 0$. ასეთი გადასვლის მათემატიკურმა მოდელმა მიიღო დასახელება **ჩართვის ფუნქცია** ანუ **ხევისაიდის ფუნქცია** (**ოლივერ ხევისაიდი** (1850-1925) –ინგლისელი მეცნიერი).

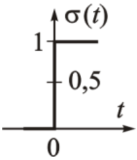


$$\sigma(t)=1(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 0.5, & t=0\\ 1, & t>0\end{cases}$$

ნახ. 1.18

ჩართვის ფუნქციის საშუალებით მოსახერხებელია აღიწეროს ელექტრულ წრედებში კომუტაციის სხვადასხვაგვარი პროცესები.

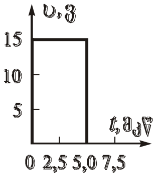
ჩართვის ფუნქციის მოყვანილი ხერხი არ არის ერთადერთად შესაძლებელი. მაგალითად, ფუნქციები რომლებიც ქმნიან მიმდევრობას $u_n(t)=\dfrac{1}{1+\exp(-nt)}$, n-ს ზრდასთან ერთად სულ უფრო ზუსტად ახდენს აპროსიმაციას სიგნალის წყვეტას, რომელიც ასრულებს ნახტომს ერთზე, როცა $t=0$ (იხ. ნახ. 1.19).



ნახ. 1.19

მაგალითი 1.1. მართკუთხა ფორმის υ იმპულსურ სიგნალს აქვს ხანგძლიობა 5 მკწმ და ამპლიტუდა 15 ვ (იხ. ნახ. 1.20). დროის ათვლის დასაწყისი ემთხვევა იმპულსის ფრონტს. ჩაწერეთ ამ სიგნალის ანალიტიკური გამოსახულება.

ამოხსნა. ცხადია, რომ დონის სიგნალის ნახტომის ეფექტი როცა $t = 0$ აღიწერება ფუნქციით $\upsilon = 15\sigma(t)$. იმისათვის, რომ იმპულსი დამთავრდეს როცა $t_0 = 5 \cdot 10^{-6}$ წმ, აუცილებელია გამოვაკლოთ ჩართვის იგივე იმპულსი, რომელიც დაყოვნებულია იგივე დროის მონაკვეთით. საბოლოოდ მივიღებთ

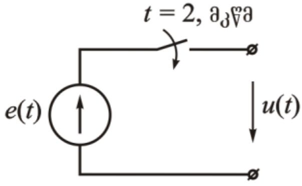


$$\upsilon(t) = 15 \cdot \sigma(t) - 15 \cdot \sigma(t - 5 \cdot 10^{-6})\ \text{ვ}.$$

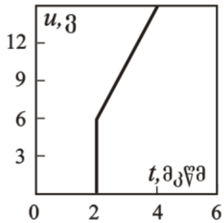
ნახ. 1.20.

მაგალითი 1.2. ემძ-ის წყარო, დროში ხაზოვნად იცვლება კანონის მიხედვით $e(t) = 3 \cdot 10^6 \cdot t$ ვ. წყარო იდეალური კომუტატორით მიერთებულია გარე წრედებთან. კომუტატორი ამუშავდება დროის $t_0 = 2$ მკწმ მომენტში. ჩაწერეთ ძაბვის მათემატიკური მოდელი ხელსაწყოს გამოსასვლელზე.

ამოხსნა. წყაროს გამოსასვლელზე (ნახ. 1.21) ძაბვა დროის 2 მკწმ ნაკლებ მონაკვეთზე, უდრის ნულს, ამიტომ ცხადია, რომ მათემატიკურ მოდელს ექნება სახე $u(t) = 3 \cdot 10^6 \cdot t \cdot \sigma\left(t - 2 \cdot 10^{-6}\right)$ ვ (ნახ. 1.22).

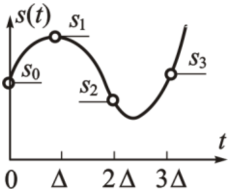


ნახ. 1.21



ნახ. 1.22

1.3.3. ნებისმიერი სიგნალის დინამიური წარმოდგენა ჩართვის ფუნქციის გამოყენებით



ნახ. 1.23

განვიხილოთ რაიმე სიგნალი $s(t)$ (ნახ. 1.23), ამასთან განსაზღვრულობისათვის დაუშვათ, რომ $s(t)=0$ როცა $t<0$. ვთქვათ $\{\Delta, 2\Delta, 3\Delta, \ldots\}$ - დროის მომენტების მიმდევრობაა და მათ შეესაბამება $\{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$ - სიგნალების მნიშვნელობების მიმდევრობა. თუ $s_0=s(0)$ - საწყისი მნიშვნელობაა, მაშინ, როგორც ჩანს აგებულობიდან სიგნალის მიმდინარე მნიშვნელობა ნებისმიერ t-ის მიახლოვებით უდრის საფეხუროვანი ფუნქციების ჯამს:

$$s(t) \approx s_0\sigma(t)+(s_1-s_0)\sigma(t-\Delta)+(s_2-s_1)\sigma(t-2\Delta)+\ldots=$$

$$=s_0\sigma(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(s_k-s_{k-1})\sigma(t-k\Delta).$$

თუ ბიჯს $\Delta \to 0$, მაშინ დისკრეტული ცვლადი $k\Delta$ შეგვიძლია შევცვალოთ უწყვეტ ცვლადათ τ. ამასთან მცირე ნაზრდები (s_k-s_{k-1}) გარდაიქმნება დიფერენციალებში $\mathrm{d}s=(\mathrm{d}s/\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}\tau$ და ჩვენ მივიღებთ ნებისმიერი სიგნალის დინამიურ წარმოდგენას **ჩართვის (ხევისაიდის)** ფუნქციის გამოყენებით:

$$s(t)=s_0\sigma(t)+\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tau}\sigma(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

მაგალითი 1.3. $s(t)$ სიგნალი უდრის ნულს როცა $t<0$ და იცვლება კვადრატული პარობოლის კანონით $s(t)=At^2$ როცა $t>0$. იპოვეთ ამ სიგნალის დინამიური წარმოდგენა.

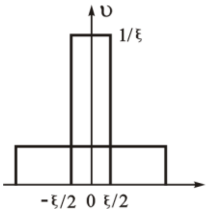
ამოხსნა: ვინაიდან $s_0=0$, ხოლო $\mathrm{d}s/\mathrm{d}\tau=2A\tau$, ამიტომ

$$s(t)=2A\int_0^{\infty}\tau\cdot\sigma(t-\tau)\mathrm{d}\tau.$$

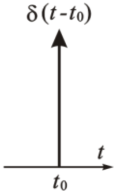
ბოლო ფორმულის შესაბამისად ელემენტარული საფეხურების სიმაღლეები, რომლებიდან იკრიფება სიგნალი, დროის მიხედვით ხაზოვნათ ისრდება

1.3.4. დინამიური წარმოდგენის მეორე ხერხი (დელტა-ფუნქცია)

განვიხილოთ მართკუთხა ფორმის იმპულსური სიგნალი მოცემული შემდეგ ნაირად: $\upsilon(t;\xi)=\frac{1}{\xi}\left[\delta\left(t+\frac{\xi}{2}\right)-\delta\left(t-\frac{\xi}{2}\right)\right]$. პარამეტრის ξ ნებისმიერად არჩევისას ამ იმპულსის ფართობი უდრის ერთს: $S_\upsilon=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\upsilon\,\mathrm{d}t=1$. (იხ. ნახ. 1.24)



ნახ. 1.24



ნახ. 1.25

მაგალითად, თუ υ - ძაბვაა, მაშინ $S_\upsilon=1$ ვ·წმ.

ვთქვათ სიდიდე ξ მიისწრაფის ნულისაკენ. იმპულსის ხანგძლიობა მცირდება, მაგრამ ფართობის სიდიდე ინარჩუნებს თავის მნიშვნელობას. ამ დროს იმპულსის სიმაღლე უსაზღვროდ იზრდება. ასეთი ფუნქციების მიმდევრობების ზღვარს როცა $\xi\to 0$ ეწოდება **დელტა-ფუნქცია,** ან **დირაკის ფუნქცია:**

$$\delta(t)=\lim_{\xi\to 0}\upsilon(t;\xi).$$

დელტა-ფუნქცია –საინტერესო მათემატიკური ობიექტია. გარდა $t=0$ წერტილისა ის უდრის ნულს. მიღებულია გამონათქვამი, რომ ფუნქცია თავმოყრილია ამ წერტილში. ამრიგად

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

და

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$$

ნახ. 1.25-ზე მოყვანილია დელტა-ფუნქციის სიმბოლური გამოსახულება.

ამ კურსში მუდმივათ გამოიყენება დელტა-ფუნქციის აპარატი. ძირითადი მიზეზი, რომელიც განაპირობებს დელტა ფუნქციის გამოყენებას მოხერხებულობას ფიზიკურ ამოცანების გადაწყვეტაში მდგომარეობს შემდეგში.

გავიხსენოთ მექანიკის ცნობილი დებულება: თუ m მასის მატერიალურ წერტილზე (t_1,t_2) დროის ინტერვალში მოქმედებს ცვლადი $F(t)$ ძალა , მაშინ წერტილის მოძრაობის რაოდენობა

$$m\upsilon_2 - m\upsilon_1 = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\mathrm{d}t\ .$$

მაშასადამე, მნიშვნელოვანი არის არა თვით ძალა, არამედ მისი იმპულსი, რომელიც ფიგურირებს განტოლების მარჯვენა ნაწილში. დელტა-ფუნქცია ზუსტად არის გარედან მოქმედი მოკლე ერთეული იმპულსის (ფართობის) მათემატიკური მოდელი.

მათემატიკიდან ცნობილია, რომ დელტა-ფუნქციის თვისებები ბევრი კლასიკური მიმდევრობების ზღვრების ნიშანდობლივია. მოვიყვანოთ ორი დამახასიატებელი მაგალითი:

$$\delta(t) = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n/(2\pi)}\exp\left(-nt^2/2\right);$$

და $\delta(t) = \lim_{n\to\infty}\left[\sin nt/(\pi t)\right].$

აქ n ზრდასთან ერთად იმპულსის ხანგძლიობა მცირდება, ხოლო მისი სიმაღლე იზრდება

1.3.4.1. სიგნალის დინამიური წარმოდგენა დელტა-ფუნქციის გამოყენებით

(აქ აღწერილი სიგნალის დინამიური წარმოდგენის ხერხში, იმისათვის რომ მივიღოთ რაიმე მყისიერი მნიშვნელობა, უნდა ვქონდეს მონაცემები სიგნალის ყოფაქცეობაზე მთელ დროის ღერძზე).

დაუბრუნდეთ ნახ. 1.16-ზე მოყვანილ ანალოგური სიგნალის აღწერილობას ერთმანეთთან მიმჯენილ მართკუთხა იმპულსების სახით. თუ s_k - არის სიგნალის მნიშვნელობა k-რ აღრიცხვის წერტილში, მაშინ ელემენტარული იმპულსი k ნომრით წარმოიდგინება ასე:

$$\eta_k(t) = s_k\left[\delta\left(t-t_k\right)-\delta\left(t-t_k-\Delta\right)\right]. \tag{1.10}$$

დინამიური წარმოდგენის პრინციპის შესაბმისად საწყისი $s(t)$ სიგნალი უნდა განიხილებოდეს როგორც ელემენტალური შესაკრეფების ჯამი:

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\eta_k(t)\ . \tag{1.11}$$

ამ ჯამში ნულიდან განსხვავებული იქნება მხოლოდ ერთი $k-$რი წევრი, რომელიც აკმაყოფილებს უტოლობას $t_k < t < t_{k+1}$. თუ (1.10) ჩავსვავთ (1.11), წინასწარ გაყოფილ და გამრავებულ ბიჯის Δ სიდიდიზე, მაშინ

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_k\,\frac{1}{\Delta}\left[\delta\left(t-t_k\right)-\delta\left(t-t_k-\Delta\right)\right]\Delta$$

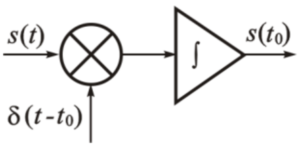
ზღვარზე გადასვლისას როცა $\Delta\to 0$, აუცილებელია შეიცვალოს აჯამვა ინტეგრირებით ფორმალური τ ცვლადით, რომლის დიფერენციალი $\mathrm{d}\tau$ შეცვლის Δ სიდიდეს. ვინაიდან $\lim\limits_{\Delta\to 0}\left[\sigma(t-t_k)-\sigma(t-t_k-\Delta)\right]\dfrac{1}{\Delta}=\delta(t-t_k)$, მივიღებთ საძიებელი სიგნალის დინამიური წარმოდგენის ფორმულას

$$s(t)=\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (1.12)$$

შესაძლებელია დავინახოთ დელტა-ფუნქციის მნიშვნელოვანი თვისება: მისი ფიზიკური განზომილება იგივეა, რაც სიხშირის განზომილება, ანუ წმ$^{-1}$.

მაშასადამე, თუ უწყვეტი ფუნქცია გავამრავლეთ დელტა-ფუნქციაზე ნამრავლი კი დროში გავაინტეგრირეთ, მაშინ რეზულტატი იქნება უწყვეტი ფუნქციის მნიშვნელობის ტოლი იმ წერტილში, სადაც თავმოყრილია δ - იმპულსი. მიღებულია გამონათქვამი, რომ ამაში მდგომარეობს დელტა-ფუნქციის **მაფილტრებელი თვისება.**

აქედან გამომდინარეობს სისტემის სტრუქტურული სქემა, რომელიც განახორციელებს ანალოგირი სიგნალის $s(t)$ მყისიერი მნიშვნელობების გაზომვას (იხ. ნახ. 1.26), სისტემა შესდგება ორი რგოლიდან: გადამამრავლებელი და ინტეგრატორი. ნათელია, რომ $s(t_0)$ გაზომვის სიზუსტე დამოკიდებულია რეალური სიგნალის (მაგალითად, მართკუთხა ფორმის ვიდეოიმპულზე) ხანგძლიობაზე.



ნახ. 1.26

რაც უფრო მცირეა იმპულსის ხანგძლიობა, მით გაზომვის სიზუსტე მეტია.