

## ლექცია 5

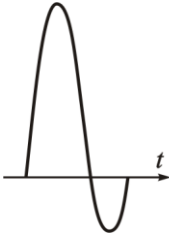
### არაპერიოდული სიბნალის სპექტრული ანალიზი.

#### ფურიეს გარდაქმნა

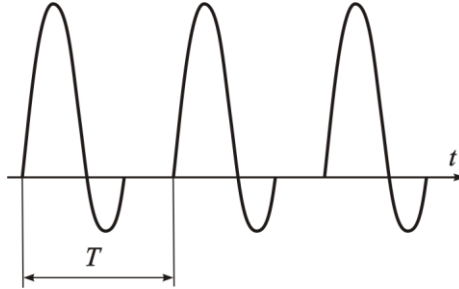
ფურიეს მეთოდი იძლევა ღრმა და ნაყოფიერი გაერთიანების საშუალებას. მისი გამოყენებით შესაძლებელია მივიღოთ არაპერიოდული სიბნალების სპექტრული მახასიათებლები.

#### 2.5. იმპულსის პერიოდული გაბრძოლება

დაე  $s(t)$ - განსაზღვრული ხანგრძლიობის განცალკავებული იმპულსია (ნახ. 2.10). აზრობრივად დაუმატოდ მას ასეთივე იმპულსები, რომლებიც რაიმე  $T$  ინტერვალით არიან დაშორებული ერთმანეთისაგან (ნახ. 2.11). მივიღებთ უკვე შესწავლილ



ნახ. 2.10



ნახ. 2.11

პერიოდულ მიმდევრობას  $s_{\text{პერ}}(t)$ , რომელიც შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ ფურიეს კომპლექსური რიგის სახით:

$$s_{\text{პერ}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad (2.13)$$

$$\text{ამპლიტუდური კოეფიციენტებით } C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (2.14)$$

იმისათვის, რომ დავბრუნდეთ უკან განცალკავებულ იმპულსთან, მივასტრაფოთ განმეორებისპერიოდი  $T$  უსასრულობისაკენ ამასთან, აშკარაა:

1. მეზობელი ჰარმონიკების სიხშირეები  $n\omega_1$  და  $(n+1)\omega_1$  აღმოჩნდებიან ისე ახლოს ერთმანეთთან, რომ ფორმულებში (2.13) და (2.14) დისკრეტული ცვლადი  $n\omega_1$  შეიძლება ჩავანაცვლოთ უწყვეტ ცვლადით  $\omega$ , სადაც ის მიმდინარე სიხშირეა.

2. ამპლიტუდური  $C_n$  კოეფიციენტები აღმოჩნდებიან უსასრულოდ პატარები ვინაიდან (2.14) ფორმულაში  $T$  სიდიდე მნიშვნელშია.

ჩვენი ამოცანაა ვიპოვოთ (2.13) ზღვრული მნიშვნელობა როცა  $T \rightarrow \infty$

## 2.6. სპექტრული სიმპრისი ცნება

ვისარგებლოთ იმით, რომ ფურიეს მწკრივის კოეფიციენტები ქმნიან კომპლექსურად-შეუღლებელ წყვილებს:

$$C_n = A_n e^{j\varphi_n}, \quad C_{-n} = A_n e^{-j\varphi_n}.$$

ყოველ ასეთ წყვილს შეესაბამება ჰარმონიული რხევა

$$A_n e^{j(n\omega_1 t + \varphi_n)} + A_n e^{-j(n\omega_1 t + \varphi_n)} = 2A_n \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

კომპლექსური ამპლიტუდით  $2A_n e^{j\varphi_n} = 2C_n$ .

განვიხილოთ  $\Delta\omega$  სიხშირის მცირე ინტერვალი, რომელიც ქმნის რაიმე არეს ამორჩეული  $\omega_0$  სიხშირის გარშემო. ამ არის ზღვრების ინტერვალში მოთავსდება  $N = \Delta\omega/\omega_1 = \Delta\omega T/(2\pi)$

**ცადკეული წყვილების სპექტრული მდგენელების რაოდენობაა.**

მათი სიხშირეები მცირე სიდეგებით განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. ამიტომ სპექტრული შემადგენლები შეგვიძლია შევაჯამოთ ისე, რომ ყველა მათგანს აქვს ერთიდაიგივე სიხშირე და ხასიათდებიან ერთნაირი კომპლექსური ამპლიტუდებით

$$2 \cdot C_n = 2 \cdot \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

საბოლოოთ ვპოულობთ ეკვივალენტური ჰარმონიული სიგნალის კომპლექსურ ამპლიტუდას, რომელიც ასახავს წილობრივ შენატანს ყველა იმ სპექტრული მდგენელისა, რომელსაც შეიცავს  $\Delta\omega$  ინტერვალი:

$$\Delta A_{\omega_0} = \frac{2N}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (2.15)$$

$$\text{ფუნქციას} \quad S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.16)$$

ეწოდება  $s(t)$  სიგნალის **სპექტრული სიმკრივე**. ფორმულა (2.16) ახორციელებს მოცემული სიგნალის ფურიე გარდაქმნას. სპექტრული სიმკრივეს ასევე უწოდებენ **სპექტრული ფუნქცია** ან **ფურიეს-სახის სიგნალი**

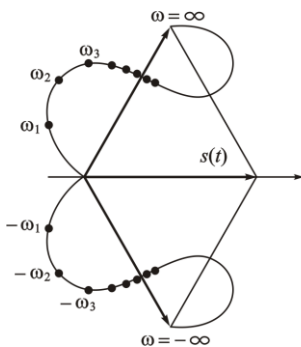
## 2.7. სპექტრული სიმკრივის ცნებას ფიზიკური აზრი

მიღებული რეზულტატების ინტერპრეტაცია მოსახერხებელია ჩავატაროთ **კუთხური** და სიხშირიდან, **ციკლური**  $f = \omega/(2\pi)$  სიხშირეზე გადასვლისას. ამასთან (2.15) მიიღებს სახეს

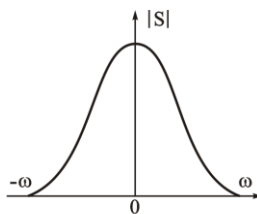
$$\Delta A_{\omega_0} = \frac{\Delta \omega}{\pi} S(\omega_0) \Rightarrow \Delta A_{f_0} = \frac{2\pi \Delta f}{\pi} S(2\pi f_0) = 2S(2\pi f_0) \Delta f. \quad (2.17)$$

ეს გამოითქმება შემდეგ ნაირად: სპექტრული სიმკრივე  $S(2\pi f_0) = S(\omega_0)$  არის პროპორციულობის კოეფიციენტი სიხშირის მცირე ინტერვალის  $\Delta f$  სიგრძის და მის მოპასუხე  $f_0$  პარმონიული სიგნალის კომპლექსური ამპლიტუდას  $\Delta A_{f_0}$  შორის. კოეფიციენტი **2** ნიშნავს, რომ ამპლიტუდის მნიშვნელობის შენატანში ერთნაირად იღებს როგორც დადებითი  $+f_0$ , ასევე უარყოფითი  $-f_0$  სიხშირეები, რომლებიც ქმნიან წერტილების გარემოს  $\pm f_0$ .

პრინციპულად მნიშვნელოვანია, რომ სპექტრული სიმკრივე – სიხშირის კომპლექსური ფუნქციაა, რომელიც ერთდროულად შეიცავს ინფორმაციას როგორც ამპლიტუდაზე, ასევე ელემენტარული სინუსოიდების ფაზაზე. ვექტორულ დიაგრამაზე (ნახ. 2.12) ელემენტარული ვექტორების სიგრძეები უსასრულოდ მცირეა, ამიტომ ტეხილის ნაცვლად ( $T$  სასრულია) მიიღება გლუვი მრუდები ( $T \rightarrow \infty$ ). თუ სიხშირის ღერძზე ავიღებთ რაიმე თანაბრად დაშორებულ წერტილების მიმდევრობას  $0 < \omega_1 < \omega_2 \dots$ ,



ნახ. 2.12



ნახ. 2.13

მაშინ სპექტრული სიმკრივის მოდული  $|S(\omega)|$  (ნახ. 2.13) მრუდის გასტვრივ აღგენს ხაზოვან მაშტაბს: რაც მეტი იქნება სპექტრული სიმკრივის მოდული, მით იშვიათად განლაგდებიან სიხშირის წერტილები ვექტორულ დიაგრამაზე.

დიაგრამა (ნახ. 2.12) აგებულია რაღაც ფიქსირებული დროის მომენტისთვის. დროის გავლისას მრუდების კონფიგურაცია იცვლება საკმარისათ რთულად, ამიტომ რაც მეტია სიხშირე, მით უფრო დიდი სიჩქარით იმოძრავენ მრუდის შესაბამისი მონაკვეთები. მაგრამ ფაქტიურად მნიშვნელოვანია არა მრუდის ფორმა, არამედ მისი ბოლო წერტილის პროექცია პორიზონტალურ ღერძზე

## 2.8. ფურიეს შემცველი გარდაქმნა

ვიპოვოთ სიგნალი თუ მოცემული გვაქვს სპექტრული სიმკრივე

დაუშვათ, რომ პერიოდული სიგნალი მიიღება პერიოდული მიმდევრობიდან, თუ მის პერიოდს მივასწრაფევთ უსასრულებლობას. ფორმულების (2.13) და (2.14) გამოყენებით, დაიწერება

$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} S(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}.$$

ამ ფორმულაში შემავალი კოეფიციენტი  $1/T$ , ნებისმიერ მთელი  $n$ -ის, მეზობელ გარმონიკების სხვაობის პროპორციულია:

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1].$$

მაშასადამე, 
$$s(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} [n\omega_1 - (n-1)\omega_1].$$

ვინაიდან ზღვარში მეზობელ ჰარმონიკებს შორის სიხშირული ინტერვალები შეუზღუდავად მცირდებიან, მიღებული ჯამი შეიძლება შეიცვალოს ინტეგრალით

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.18)$$

ამ მნიშვნელოვან ფორმულას ეწოდება  $s(t)$  სიგნალის **ფურიეს შექცეული გარდაქმნა**.

საბოლოოდ ჩამოვაყალიბოთ ეს მნიშვნელოვანი რეზულტატი:  $s(t)$  სიგნალი და მისი  $S(\omega)$  სპექტრული სიმკრივე ურთიერთცალსახათ დაკავშირებულია ფურიეს პირდაპირი და შექცეული გარდაქმნებით, შესაბამისად:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt, \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.19)$$

სპექტრული დაშლის მეთოდი მნიშვნელოვნად ანეიტარებს სიგნალების თეორიას. მაგალითად, სიგნალის მატემატიკური მოდელი  $s(t)$  მოცემულია დროის არეში რთულია და არასაკმა-  
რისად თვალსაჩინო. ამავდროულად ამ სიგნალის აღწერა სიხ-  
შირულ არეში  $S(\omega)$  ფუნქციით გამოყენებით შესაძლოა აღმოჩ-  
დეს ძალზე მარტივი.

ამის გარდა მნიშვნელოვანია ის, რომ სიგნალის სპექტრული წარმოდგენა ხსნის პირდაპირ გზას ფართო კლასის რადიოტექ-  
ნიკურ წრედებში, მოწყობილობებში და სისტემებში, სიგნა-  
ლების გავლის ანალიზისათვის.