ლექცია 7

ფურიეს გარდაქმნის ძირითადი თვისებები

ვისწავლეთ რა საკმაოდ მარტივი, მაგრამ ხშირად შემხვედრი იმპულსური სიგნალების სპექტრული სიმკვრივეები, გადავიდეთ ფურიეს გარდაქმნის თვისებების სისტემატურ შესწავლაზე.

2.15. ფურიეს გარდაქმნის წრფივობა

ეს უმთავრესი თვისება ფორმულირდება ასე: თუ გვაქვს სიგნალთა რაიმე ერთობლიობა $s_1(t), s_2(t), \ldots,$ ამასთან $s_1(t) \to S_1(\omega), \quad s_2(t) \to S_2(\omega), \ldots,$ მაშინ სიგნალების გასაშუალებული ჯამი ფურიეს მიხედვით გარდაიქმნება შემდეგნაირად:

$$\sum_i a_i s_i(t) \leftrightarrow \sum_i a_i S_i(\omega) \quad . \tag{2.26}$$

აქ a_i ნებისმიერი რიცხვითი კოეფიციენტებია.

(2.26) ფორმულის დასამტკიცებლად უნდა შევიტანოთ სიგნალების ჯამი ფურიეს გარდაქმნაში ($S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-jn\omega_0 t} \mathrm{d}t$ (2.16)).

2.16. სპექტრული სიმკვრივის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების თვისებები

დავუშვათ $s(t)$ სიგნალია, რომელიც იღებს ნამდვილ მნიშვნელობებს. ეს სპექტრული სიმკვრივე ზოგად შემთხვევაში არის კომპლექსური:

$$S(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t - j\int\limits_{-\infty}^{\infty} s(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t = A(\omega) - jB(\omega).$$

ჩავსვათ ეს გამოსახულება ფურიეს უკუ გარდაქმნის ფორმულაში (შეგახსენებთ, რომ $s(t) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega$ (2.18)):

$$s(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[A(\omega) - jB(\omega)\right](\cos\omega t + j\sin\omega t)\mathrm{d}\omega.$$

იმისათვის, რომ სიგნალი, მიღებული ასეთი ორმაგი გარდაქმნის გზით, დარჩეს ნამდვილი, აუცილებელია მოვითხოვოთ, რომ

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\sin(\omega t)\mathrm{d}\omega = 0, \quad \text{და} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} B(\omega)\cos(\omega t)\mathrm{d}\omega = 0.$$

ეს შესაძლებელია მხოლოდ იმ შემთხვევაში, თუ სიგნალის სპექტრული სიმკვრივის ნამდვილი ნაწილი $A(\omega)$ სიხშირის ლუწი, ხოლო წარმოსახვითი ნაწილი $B(\omega)$ − სიხშირის კენტი ფუნქციაა:

$$A(\omega)=A(-\omega), \qquad B(\omega)=-B(-\omega). \tag{2.27}$$

2.17. დროში წანაცვლებული სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე

დავუშვათ, რომ $s(t)$ სიგნალისათვის ცნობილია შესაბამისობა $s(t)\leftrightarrow S(\omega)$. განვიხილოთ ასეთივე სიგნალი, რომელიც აღიძვრება t_0 წამის დაგვიანებით. მივიჩნიოთ t_0 წერტილი დროის ათვლის ახალ საწყისად და აღვნიშნოთ ეს წანაცვლებული სიგნალი, როგორც

$$s(t-t_0)\leftrightarrow S(\omega)e^{-j\omega t_0}. \tag{2.28}$$

დამტკიცება საკმაოდ მარტივია. მართლაც, $(t-t_0)$ ცვლადის შეცვლით, ანუ $t-t_0=x$, მივიღებთ

$$s(t-t_0)\leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}s(t-t_0)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}s(x)e^{-j\omega t_0}e^{-j\omega x}dx=S(\omega)e^{-j\omega t_0}.$$

კომპლექსური რიცხვის $\exp(-j\omega t_0)$ მოდული ნებისმიერი t_0-ის დროს, **ერთის ტოლია**, ამიტომ ელემენტარული ჰარმონიული მდგენელების ამპლიტუდები, რომლებიდანაც შედგება სიგნალი, არ არის დამოკიდებული მის მდებარეობაზე დროის ღერძზე. ინფორმაცია სიგნალის ამ მახასიათებლის შესახებ ჩადებულია მისი სპექტრული სიმკვრივის არგუმენტის სიხშირულ დამოკიდებულებაში (ფაზურ სპექტრში).

2.18. სიგნალის სპექტრული სიმკვრივის დამოკიდებულება დროის გაზომვის მასშტაბის ამორჩევაზე

დავუშვათ, რომ საწყისი სიგნალი $s(t)$ ექვემდებარება დროის მასშტაბის ცვლილებას. ეს ნიშნავს, რომ t დროის როლს ასრულებს ახალი დამოუკიდებელი ცვლადი kt (k რაიმე ნამდვილი რიცხვია). თუ $k>1$, მაშინ ხდება საწყისი სიგნალის "შეკუმშვა"; თუ $0<k<1$, მაშინ სიგნალი "იწელება" დროში.

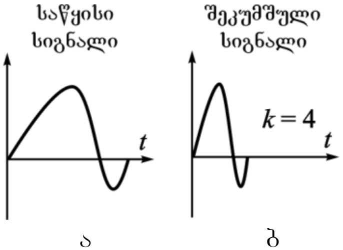
თურმე, თუ $s(t)\leftrightarrow S(\omega)$, მაშინ $s(kt)\leftrightarrow \dfrac{1}{k}S(\dfrac{\omega}{k}).$ (2.29)

მართლაც, ცვლადის შეცვლით $kt=x$, ანუ $t={x}/{k}$

$$s(kt) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(kt)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{-j\frac{\omega}{k}x}\mathrm{d}x,$$

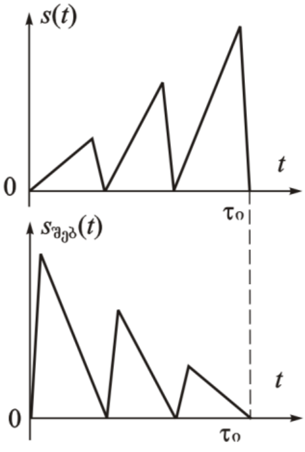
საიდანაც გამომდინარეობს ფორმულა (2.29).

ამრიგად იმისათვის, რომ, მაგალითად, შევკუმშოთ სიგნალი დროში, მისი ფორმის შენარჩუნებით, აუცილებელია გავანაწილოთ იგივე სპექტრული მდგენელები სიხშირეთა უფრო ფართო ინტერვალში მათი ამპლიტუდების შესაბამისი პროპორციული შემცირებისას (იხ. ნახ. 2.20 ა და ბ).



ნახ. 2.20

აქ განხილულ საკითხს მჭიდროდ უახლოვდება შემდეგი ამოცანა. მოცემულია იმპულსი $s(t)$, რომელიც $[0,\tau_0]$ მონაკვეთზე განსხვავდება ნულისაგან და ხასიათდება სპექტრული სიმკვრივით $S(\omega)$.



ნახ. 2.21

საჭიროა ვიპოვოთ “დროში შებრუნებული” სიგნალის $s_{შებ}(t)$ სპექტრული სიმკვრივე $S_{შებ}(\omega)$, რომელიც წარმოადგენს საწყისი იმპულსური რხევის “სარკისებურ ასლს”. რამდენადაც ცხადია, რომ $s_{შებ}(t)=s(\tau_0-t)$, ამდენად

$$S_{შებ}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau_0-t)e^{-j\omega t}dt.$$

ცვლადის შეცვლით $x=\tau_0-t$ ვპოულობთ, რომ

$$S_{შებ}(\omega)=e^{-j\omega\tau_0}\int_{-\infty}^{\infty} s(x)e^{-j\omega x}dx = e^{-j\omega\tau_0}S(-\omega)=e^{-j\omega\tau_0}S^*(\omega). \qquad (2.30)$$

2.19. წარმოებულის და განუსაზღვრელი ინტეგრალის სპექტრული სიმკვრივე

დავუშვათ მოცემულია სიგნალი $s(t)$ და მისი სპექტრული სიმკვრივე $S(\omega)$. შევისწავლოთ ახალი სიგნალი $f(t)=ds/dt$ და მიზნად დავისახოთ მისი სპექტრული სიმკვრივის $F(\omega)$ პოვნა.

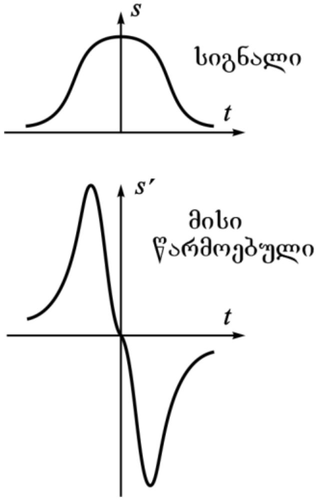
განსაზღვრის თანახმად,
$$f(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{s(t)-s(t-\tau)}{\tau}. \qquad (2.31)$$

ფურიეს გარდასახვა **წრფივი ოპერაციაა**, რაც ნიშნავს, რომ ტოლობა (2.31) სამართლიანია სპექტრული სიმკვრივეებთან მიმართებაშიც. (2.28)-ის $\left[s(t-t_0)\leftrightarrow S(\omega)e^{-j\omega t_0}\right]$ გათვალისწინებით

$$F(\omega)=\lim_{\tau\to 0}\frac{S(\omega)e^{-j\omega t(0)}-S(\omega)e^{-j\omega\tau}}{\tau}=\lim_{\tau\to 0}\frac{1-\exp(-j\omega\tau)}{\tau}S(\omega). \qquad (2.32)$$

ექსპონენციალური ფუნქციის **ტეილორის მწკრივად** წარმოდგენით: $\exp(-j\omega\tau)=1-j\omega\tau-(\omega\tau)^2/2-...,$ ამ მწკრივის ჩასმით (2.32) –ში და პირველი ორი წევრით შემოფარგვლით, ვპოულობთ

$$F(\omega)=j\omega S(\omega). \qquad (2.33)$$



ნახ. 2.22

დიფერენცირებისას სიგნალის ცვლილების სიჩქარე დროში იზრდება. აქედან გამომდინარე, წარმოებულის სპექტრის მოდულს, აქვს დიდი მნიშვნელობები მაღალი სიხშირეების არეში საწყისი სიგნალის სპექტრის მოდულთან შედარებით.

ფორმულა (2.32) განზოგადდება n რიგის წარმოებულის სპექტრის შემთხვევაზე. ადვილია იმის დამტკიცება, რომ თუ $g(t)=\mathrm{d}^n s/\mathrm{d}t^n$, მაშინ

$$G(\omega)=(j\omega)^n S(\omega). \qquad (2.34)$$

ამგვარად, სიგნალის დროში დიფერენცირება ექვივალენტურია სპექტრული სიმკვრივის მამრავლზე გადამრავლების უბრალო არითმეტიკული ოპერაციისა. ამიტომ მიღებულია ითქვას, რომ წარმოსახვითი რიცხვი $j\omega$ წარმოადგენს ***დიფერენცირების ოპერატორს, რომელიც მოქმედებს სიხშირულ არეში.***

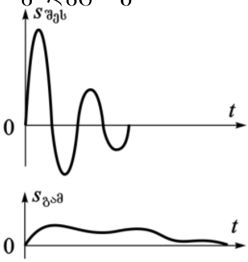
განხილული ფუნქცია $s(t)=\int f(t)dt$ წარმოადგენს პირველყოფილს (განუსაზღვრელ ინტეგრალს) $f(t)$ ფუნქციის მიმართ. (2.33)–დან ფორმალურად გამომდინარეობს, რომ პირველყოფილის სპექტრი

$$S(\omega)=F(\omega)/(j\omega). \qquad (2.35)$$

ამრიგად, მამრავლი $1/(j\omega)$ ***წარმოადგენს ინტეგრირების ოპერატორს სიხშირულ არეში.***

2.20. სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე ინტეგრატორის გამოსასვლელზე

მრავალ რადიოტექნიკურ მოწყობილობაში გამოყენებას პოულობენ ეგრეთწოდებული ***ინტეგრატორები*** – ფიზიკური სისტემები, რომელთა გამოსასვლელი სიგნალი შესასვლელი ზემოქმედების ინტეგრალის პროპორციულია. განვიხილოთ კონკრეტულად ინტეგრატორი, რომელიც ახორციელებს შესასვლელი სიგნალის $s_{შეს}(t)$ გარდაქმნას გამოსასვლელ სიგნალად $s_{გამ}(t)$ შემდეგი კანონის მიხედვით (ნახ. 2.23):



ნახ. 2.23

$$s_{გამ}(t)=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} s_{შეს}(\xi)d\xi. \qquad (2.36)$$

აქ $T>0$ – ფიქსირებული პარამეტრია.

განსაზღვრული ინტეგრალი, რომელიც შედის (2.36)–ში, აშკარაა, $s_{შეს}(t)$ სიგნალი მისი პირველყოფილის ორი მნიშვნელობის სხვაობის ტოლია. ერთი გამოითვლება t არგუმენტის დროს, ხოლო მეორე $t-T$ არგუმენტის დროს. (2.28) და (2.35) თანაფადობების გამოყენებით ვღებულობთ შესასვლელსა და გამოსასვლელზე სიგნალების სპექტრულ სიმკვრივეებს შორის კავშირის ფორმულას:

$$S_{გამ}(\omega)=\frac{S_{შეს}(\omega)}{j\omega T}(1-e^{-j\omega T}). \qquad (2.37)$$

ნებისმიერი სიხშირეების დროს, ფრჩხილებში მოთავსებული თანამამრავლი შემოფარგლულია, ამავე დროს მნიშვნელის მოდული წრფივად იზრდება სიხშირის ზრდასთან ერთად. ეს მოწმობს იმას, რომ განხილული ინტეგრატორი მოქმედებს დაბალი სიხშირეების ფილტრის მსგავსად, ანუ ატარებს დაბალ სიხშირეებს. მავე დსროს ის ასუსტებს შესასვლელი სიგნალის მაღალსიხშირულ სპექტრულ მდგენელებს.

2.21. სიგნალების ნამრავლის სპექტრული სიმკვრივე

როგორც ცნობილია, სიგნალების შეკრებისას მათი სპექტრები იკრიბება. ამასთან სიგნალების ნამრავლის სპექტრი სპექტრების ნამრავლს კი არ უდრის, არამედ გამოისახება რაღაც სპეციალური ინტეგრალური თანაფარდობით თანამამრავლთა სპექტრებს შორის.

დავუშვათ $u(t)$ და $\upsilon(t)$ ორი სიგნალია, რომელთათვისაც ცნობილია $u(t)\leftrightarrow U(\omega),\ \upsilon(t)\leftrightarrow V(\omega)$ შესაბამისობანი. შევქმნათ

ამ სიგნალების ნამრავლი $s(t)=u(t)v(t)$ და გამოვთვალოთ მისი სპექტრული სიმკვრივე. საერთო წესის მიხედვით

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\upsilon(t)e^{-j\omega t}dt. \qquad (2.38)$$

ფურიეს უკუ გარდაქმნის გამოყენებით გამოვსახოთ სიგნალი $\upsilon(t)$ მისი სპექტრული სიმკვრივით და შედეგი ჩავსვათ (2.38-ში)

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty}V(\xi)e^{j\xi t}d\xi\right]e^{-j\omega t}dt.$$

ინტეგრირების რიგის შეცვლით გვექნება

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty}u(t)e^{-j(\omega-\xi)t}dt\right]d\xi,$$

საიდანაც

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}V(\xi)U(\omega-\xi)d\xi. \qquad (2.39)$$

ინტეგრალს, რომელიც დგას მარჯვენა ნაწილში, უწოდებენ V და U ფუნქციების ***ნახვევს***. შემდგომში ნახვევის ოპერაციას სიმბოლურად აღვნიშნავთ ასე: $\int_{-\infty}^{\infty}V(\xi)U(\omega-\xi)d\xi=V(\omega)*U(\omega).$

ამგვარად, ორი სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე მუდმივი რიცხვითი თანამამრავლის სიზუსტით თანამამრავლთა სპექ-ტრული სიმკვრივეების ნახვევის ტოლია:

$$u(t)v(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}V(\omega)*U(\omega). \qquad (2.40)$$

ძნელი არაა დავრწმუნდეთ, რომ ნახვევის ოპერაცია **კომუ-ტატიურია**, ე.ი. უშვებს გარდასაქმნელი ფუნქციების თანმიმ-დევრობის რიგის შეცვლას: $\mathrm{V}(\omega)*\mathrm{U}(\omega)=\mathrm{U}(\omega)*\mathrm{V}(\omega).$

ზემოთ დამტკიცებული თეორემა ნახვევის შესახებ შეიძლება შებრუნებულ იქნას: თუ რაიმე სიგნალის სპექტრული სიმკვრივე წარმოიდგინება ნამრავლის $\mathrm{S}(\omega)=\mathrm{S}_1(\omega)\mathrm{S}_2(\omega)$ სახით, ამასთან $\mathrm{S}_1(\omega)\leftrightarrow \mathrm{s}_1(\mathrm{t}),$ და $\mathrm{S}_2(\omega)\leftrightarrow \mathrm{s}_2(\mathrm{t}),$ მაშინ სიგნალი $\mathrm{s(t)}\leftrightarrow \mathrm{S}(\omega)$ წარმოადგენს $\mathrm{s}_1(\mathrm{t})$ და $\mathrm{s}_2(\mathrm{t})$ სიგნალების ნახვევს, მაგრამ არა უკვე სიხშირულ, არამედ დროით არეში:

$$S(\omega)\leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}s_1(t-\xi)s_2(\xi)d\xi). \qquad (2.41)$$