ლექცია 10-11

თავი II. თემა: ლაპლასის გარდაქმნა

ასე ეწოდება ინტეგრალური გარდაქმნის კიდევ ერთ სახეს, რომელიც ფურიეს გარდაქმნასთან ერთად ფართოდ გამოიყენება რადიოტექნიკაში საკმაოდ განსხვავებული ამოცანებისთვის, რაც დაკავშირებულია სიგნალების შესწავლასთან.

2.38. კომპლექსური სიხშირის ცნება

სპექტრული მეთოდები, როგორც ცნობილია, დაფუძნებულია იმაზე, რომ გამოსაკვლელი სიგნალი წარმოიდგინება ელემენტარული შესაკრებების უსაზღვროდ დიდი რიცხვის სახით, რომელთაგან თითოეული დროში იცვლება პერიოდულად კანონით $\exp(j\omega t)$.

ამ პრინციპის ბუნებრივი განზოგადება მდგომარეობს იმაში, რომ ნაცვლად კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალებისა სუფთა წარმოსახვითი მაჩვენებლებით განიხილავენ $\exp(pt)$ სახის სიგნალებს, სადაც p კომპლექსური რიცხვია: $p=\sigma+j\omega$, რომელმაც მიიღო ***კომპლექსური სიხშირის*** სახელწოდება.

ორი ასეთი კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალისაგან შეიძლება შევადგინოთ ნამდვილი სიგნალი, მაგალითად შემდეგი წესის მიხედვით:

$$s(t)=(e^{pt}+e^{p^*t})/2, \qquad (2.52)$$

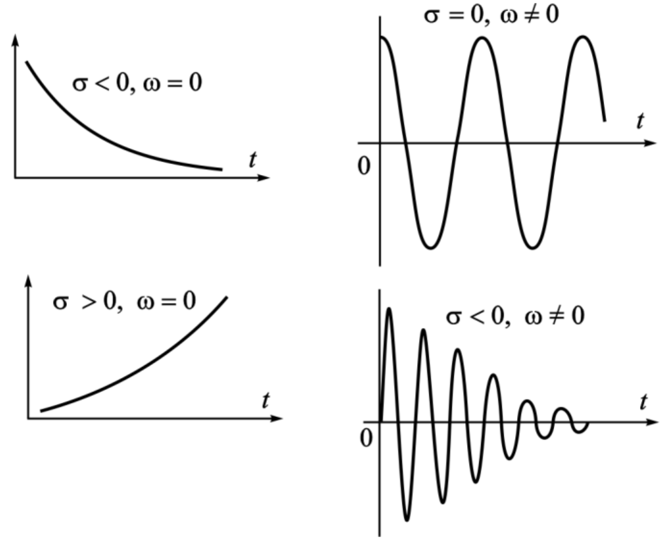
სადაც $p^*=\sigma-j\omega$ კომპლექსურ-შეუღლებული სიდიდეა.

მართლაც, ამ დროს

$$s(t)=e^{\sigma t}\,\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}=e^{\sigma t}\cos\omega t. \qquad (2.53)$$

კომპლექსური სიხშირის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილების არჩევის მიხედვით შეიძლება მივიღოთ სხვადასხვა სახის ნამდვილი სიგნალები. ამგვარად, თუ $\sigma=0$, მაგრამ $\omega\neq0$, მაშინ მიიღება $\cos\omega t$ სახის ჩვეულებრივი ჰარმონიული რხევები. თუ $\omega=0$ მაშინ $\sigma-$ის ნიშნის მიხედვით მიიღება დროში ზრდადი ან კლებადი ექსპონენციალური რხევები.

ასეთი სახის სიგნალები იღებენ უფრო რთულ ფორმას, როცა $\omega\neq0$. აქ მამრავლი $\exp(\sigma t)$ აღწერს მომვლებს, რომელიც ექსპონენციალურად იცვლება დროში. ზოგიერთი ტიპიური სიგნალები გამოსახულია ნახ. 2.33 -ზე.



ნახ. 2.32. ნამდვილი სიგნალები, რომლებიც პასუხობენ კომპლექსური სიხშირის სხვადასხვა მნიშვნელობებს

კომპლექსური სიხშირის ცნება აღმოჩნდა მეტად სასარგებლო უპირველეს ყოვლისა იმიტომ, რომ ის გვაძლევს შესაძლებლობას, არ მივმართოთ განზოგადებულ ფუნქციებს, მივიღოთ სიგნალების სპექტრული წარმოდგენები, რომელთა მათემატიკური მოდელები არაინტეგრირებადია. არსებითია სხვა მოსაზრებაც: (2.53) სახის ექსპონენციალური სიგნალები წარმოადგენენ სხვადასხვა წრფივ სისტემებში რხევების გამოკვლევის ”ბუნებრივ” საშუალებას. ეს საკითხები შესწავლილი იქნება ”წრფივი სისტემები”-ს მე-3 თავში.

ყურადღება უნდა მიექცეს იმას, რომ ჭეშმარიტი ფიზიკური სიხშირე წარმოადგენს კომპლექსური სიხშირის წარმოსახვით ნაწილს. კომპლექსური სიხსირის ნამდვილ ნაწილისათვის სპეციალური ტერმინი არ არსებობს.

2.39. ძირითადი თანაფარდობანი

ვთქვათ $f(t)$ რაიმე სიგნალია, ნამდვილი ან კომპლექსური, განსაზღვრული $t \geq 0$ დროს და რომელიც უდრის ნულს დროის უარყოფითი მნიშვნელობებისას. ამ სიგნალის ლაპლასის გარდაქმნა არის კომპლექსური p ცვლადის ფუნქცია, რომელიც მოიცემა ინტეგრალით:

$$F(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \tag{2.54}$$

$f(t)$ სიგნალს ეწოდება ***ორიგინალი***, ხოლო $F(p)$ ფუნქციას – მისი ***გამოსახულება*** *ლაპლასის მიხედვით* (მოკლედ, უბრალოდ *გამოსახულება*).

პირობა, რომელიც უზრუნველყოფს (2.54) ინტეგრალის არსებობას, მდგომარეობს შემდეგში: $f(t)$ სიგნალს უნდა ჰქონდეს ზრდის არაუმეტეს ექსპონენციალური ხარისხი, როცა $t>0$, ე.ი. უნდა აკმაყოფილებდეს უტოლობას $|f(t)| \le A\exp(at)$, სადაც $A, a-$დადებითი რიცხვებია.

ამ უტოლობის შესრულებისას $F(p)$ ფუნქცია არსებობს იმ აზრით, რომ (2.54) ინტეგრალი აბსოლუტურად კრებადია ყველა p კომპლექსური რიცხვისთვის, რომელთათვისაც $\operatorname{Re} p > a$. a რიცხვს უწოდებენ **აბსოლუტური კრებადობის აბსცისას**.

ცვლადი p ძირითად ფორმულაში (2.54) შეიძლება იყოს გაიგივებული კომპლექსურ სიხშირესთან $p=\sigma+j\omega$. მართლაც, სუფთა წარმოსახვითი კომპლექსური სიხშირისას, როცა $\sigma=0$, ფორმულა (2.54) გადადის (2.16) $\left(S(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right)$ ფორმულაში, რომელიც განსაზღვრავს სიგნალის ფურიეს გარდაქმნას. ის ნულის ტოლია როცა $t<0$. ამრიგად, ლაპლასის გარდაქმნა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ფურიეს გარდაქმნის განზოგადება კომპლექსური სიხშირების შემთხვევაზე.

მსგავსად იმისა, როგორც ეს ხდება ფურიეს გარდაქმნის თეორიაში, თუ ვიცით გამოსახულება, შეიძლება აღვადგინოთ ორიგინალი. ამისათვის ფურიეს უკუ გარდაქმნის ფორმულაში

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

მიზანშეწონილია შევასრულოთ ანალიტიკური გაგრძელება, წარმოსახვითი $j\omega$ ცვლადიდან $\sigma+j\omega$ კომპლექსურ არგუმენტზე გადასვლით. კომპლექსური სიხშირის სიბრტყეზე ინტეგრირებას ახდენდნენ უსაზღვროდ გაჭიმული ვერტიკალური ღერძის გასწვრივ, რომელიც განლაგებულია აბსოლუტური კრებადობის აბსცისის მარჯვნივ. ვინაიდან როცა $\sigma=const$

დიფერენციალი $d\omega = (1/j)\,dp$, ლაპლასის უკუ გარდაქმნის ფორმულა ღებულობს სახეს

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)e^{pt}dp\,. \qquad (2.55)$$

კომპლექსური ცვლადის თეორიაში დამტკიცებულია, რომ ლაპლასის მიხედვით გამოსახულებას აქვს "კარგი" თვისებები სიგლუვის თვალსაზრისით: ასეთი გამოსახულებები კომპლექსური სიბრტყის ყველა p წერტილში, ეგრეთწოდებული განსაკუთრებული წერტილების ცვლადი სიმრავლის გამოკლებით, წარმოადგენენ ანალიზურ ფუნქციებს. განსაკუთრებული წერტილები, როგორც წესი, – პოლუსებია, ერთჯერადი ან მრავალჯერადი. ამიტომ (2.55) სახის ინტეგრალების გამოსათვლელად შეიძლება გამოვიყენოთ ნაშთთა თეორიის მოქნილი მეთოდები.

პრაქტიკაში ფართოდ გამოიყენება ლაპლასის გარდაქმნის ცხრილები, რომლებშიც თავმოყრილია ცნობები ორიგინალებსა და გამოსახულებებს შორის შესაბამისობის შესახებ.

ცხრილების არსებობამ ლაპლასის გარდაქმნა გახადა პოპულარული როგორც თეორიულ კვლევებში, ისე რადიოტექნიკური მოწყობილობებისა და სისტემების საინჟინრო გაანგარიშებებში. [6]-ის დანართებში გვაქვს ისეთი ცხრილი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს გადავწყვიტოთ ამოცანების საკმაოდ ფართო წრე.

2.40. ლაპლასის გარდაქმნების გამოთვლის მაგალითები

გამოსახულებების გამოთვლის საშუალებებში ბევრი საერთოა იმასთან, რაც უკვე შესწავლილია ფურიეს გარდაქმნებთან დაკავშირებით. განვიხილოთ შედარებით მახასიათებელი შემთხვევები.

მაგალითი 2.4. *დაადგინეთ განზოგადოებული ექსპონენციალური იმპულსის გამოსახულება.*

ამოხსნა: ვთქვათ $f(t) = \exp(p_0 t)\sigma(t)$, სადაც $p_0 = \sigma_0 + j\omega_0$ – ფიქსირებული კომპლექსური რიცხვია. σ ფუნქციის არსებობა უზრუნველყოფს ტოლობას $f(t) = 0$ როცა $t < 0$. თუ გამოვიყენებთ (2.54) ფორმულას $\left(F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \right)$, მივიღებთ

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-(p-p_0)t}dt=-\frac{e^{-(p-p_0)t}}{p-p_0}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}.$$

თუ $\operatorname{Re} p>\sigma_0$, მაშინ მრიცხველი იქცევა ნულად ზედა ზღვრის ჩასმისას. შედეგად მივიღებთ შესაბამისობას

$$e^{p_0 t}\sigma(t)\leftrightarrow \frac{1}{p-p_0} \qquad (2.56)$$

როგორც (2.56) ფორმულის კერძო შემთხვევა, შეიძლება ვიპოვოთ გამოსახულებები ნამდვილი ექსპონენციალური ვიდეოიმპულსისა:

$$e^{-\alpha t}\sigma(t)\leftrightarrow \frac{1}{p+\alpha} \qquad (2.57)$$

და კომპლექსური ექსპონენციალური სიგნალისა:

$$e^{j\omega_0 t}\sigma(t)\leftrightarrow \frac{1}{p-j\omega_0} \qquad (2.58)$$

ბოლოს, (2.57)-ში $\alpha=0$ ჩასმით, მივიღებთ ხევისაიდის ფუნქციის გამოსახულებას:

$$\sigma(t)\leftrightarrow \frac{1}{p} \qquad (2.59)$$

მაგალითი 2.5. *დაადგინეთ დელტა-ფუნქციის გამოსახულება.*

ამოხსნა: თუ განსახილველი იმპულსი აღიძვრება $t_0>0$ დროის მომენტში, მაშინ ინტეგრალი

$$\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)e^{-pt}dt=e^{-pt_0}.$$

ამგვარად, $$\delta(t-t_0)\leftrightarrow e^{-pt_0} \qquad (2.60)$$

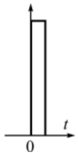
ეს გამოსახულება განსაზღვრულია კომპლექსური სიბრტყის ყველა p წერტილში და არსად არ გააჩნია თავისებურებანი, გარდა უსასრულოდ დაშორებული წერტილისა.

გარკვეულ სირთულეს შეიძლება წარმოადგენდეს დელტა-იმპულსის გამოსახულების გამოთვლა, რომელიც თავმოყრილია როცა $t=0$, რამდენადაც გაუგებარია, როგორ უნდა გავითვალისწინოთ წილი განზოგადებული ფუნქციიდან, რომელიც თავმოყრილია ინტეგრირების არის ერთ-ერთ ბოლოში. საქმე იმაშია, რომ თავში 1 დელტა-ფუნქცია განსაზღვრული იყო როგორც იმ იმპულსების თანმიმდევრობის ზღვარი, რომლებიც სიმეტრიულია $t=0$ წერტილის მიმართ. თუ ფორმალურად მოვიქცევით, მაშინ ინტეგრირების არის ფარგლებში აღმოჩნდება ასეთი იმპულსის მხოლოდ ნახევარი, რაც მიგვიყვანს

ინტეგრალის ორჯერად შემცირებამდე. იმისათვის, რომ ეს არ მოხდეს, $\delta(t)$ ფუნქციის გამოსახულება განისაზღვრება როგორც ზღვარი

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0-\varepsilon}^{\infty}\delta(t)e^{-pt}dt=1,$ რომელიც არ არის დამოკიდებული ε პარამეტრზე. ასეთი მიდგომისას $\delta(t)$ ფუნქცია მთლიანად ეკუთვნის ინტეგრირების არეს. ამიტომ დელტა-იმპულსი (ნახ. 2.34) ეკუთვნის $t>0$ არეს, ანუ

$$\delta(t)\leftrightarrow 1\ . \tag{2.61}$$



ნახ. 2.34

2.41. წარმოებულების გამოსახულება

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ სიგნალის პირველი წარმოებულის გამოსახულება, საჭიროა შევასრულოთ ნაწილობითი ინტეგრირება:

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}e^{-pt}\mathrm{d}t=f(t)e^{-pt}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}+p\int\limits_{0}^{\infty}f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

ადვილად ვრწმუნდებით, რომ პირველი წარმოებულის გამოსახულება შეიცავს სიგნალის მნიშვნელობას საწყის წერტილში:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow pF(p)-f(0). \tag{2.62}$$

ინდუქციის მიხედვით მტკიცდება ფორმულა n-რიგის წარმოებულის გამოსახულებისათვის:

$$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}t^n}\leftrightarrow p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f^{'}(0)-...-pf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0) \tag{2.63}$$

საწყისი მდგომარეობის გათვალისწინების შესაძლებლობა $t=0$ დროს საშუალებას გვაძლევს გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნის მეთოდი უცნობი საწყისი პირობების მქონე წრფივი დიფერენციალური განტოლებების ამოსახსნელად.

ლაპლასის გარდაქმნის ძირითადი თვისებები ფურიეს გარდაქმნის აღწერილი თვისებების მსგავსია [14] (Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы терии функций комплексного переменного. – М.: Физматгиз, 1958.).