ლექცია 24

5.3. ვიწროზოლოვანი სიგნალები

ასეთი სახის რადიოტექნიკური სიგნალები წარმოიშვება სიხშირულ -ამორჩევითი წრედების და ხელსაწყოების გამოსასვლელებზე. განსაზღვრის თანახმად, სიგნალს ეწოდება **ვიწროზოლოვანი,** თუ მისი სპექტრული სიმკრივე ნულიდან განსხვავებულია მხოლოდ სიგნანლის სიხშირულ ინტერვალების Π ზღვრებში, რომელიც შექვნილია $\pm\omega_0$ წერტილების მიდამოებით, ამასთან უნდა სრულდებოდეს პირობა $\Pi/\omega_0 \ll 1$.

როგორც წესი, შესაძლებელია ჩავთვალოდ, რომ ω_0 სიხშირე, რომელსაც ეწოდება **საყდენი სიხშირული სიგნალი**, ემთხვევა სპექტრის ცენტრალურ სიხშირეს. მაგრამ ზოგად შემთხვევაში მისი ამორჩევა საკმაოდ ნებისმიერია.

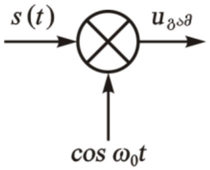
5.3.1. ვიწროზოლოვანი სიგნალის მათემატიკური მოდელი

როგორც ცნობილია (იხ თავი II), თუ $f_1(t)$- დაბალსიხშირული სიგნალია, რომლის სპექტრი თავმოყრილია ნულოვან სიხშირის მიდამოში, მაშინ, საკმაოდ დიდი ω_0 მნიშვნელობისას, მაშინ $s_1(t)=f_1(t)\cos\omega_0 t$ რხევას ექნება ვიწროზოლოვანი სიგნალის ყველა აუცივლებელი პირობა, ვინაიდან მისი სპექტრი აღმოჩნდება კონცენტრირებული $\pm\omega_0$ წერტილის მიდამოში. ვიწროზოლოვანი იქნება სიგნალიც $s_2(t)=f_2(t)\sin\omega_0 t$, რომელიც განსხვავდება თანამამრავლის ფაზით. ვიწროზოლოვანი სიგნალის ზოგადი მათემათიკური მოდელი შესაძლებელია მივიღოთ თუ შევადგენთ ხაზოვანი კომბინაციას სახით

$$s(t)=A_s(t)\cos\omega_0 t - B_s(t)\sin\omega_0 t\,. \tag{5.25}$$

ფუნქციის ორივე შესავალი დროის ფუნქციები $A_s(t)$ და $B_s(t)$ არიან დაბალსიხშიროვანები იმ აზრით, რომ მათი ფარდობითი ცვლილება საკმარისად მცირეა მაღალსიხშიროვანი რხევის პერიოდში $T=2\pi/\omega_0$. მიღებულია, მოცემული ω_0 საყდენი სიხშირის მნიშვნელობისას, $A_s(t)$ ეწოდება ფუნქცია სინფაზური ამპლიტუდით, ხოლო $B_s(t)$- ვიწროზოლოვანი $s(t)$ სიგნალის ფუნქცია კვადრატურული ამპლიტუდით.

სინფაზური და კვადრატურული ამპლიტუდები შესაძლებელია გამოვყოთ აპარატული ხერხით. ნამდვილად, ვთქვათ გვაქვს გადამამრავლებელი მოწყობილობა (იხ. ნახ. 5.14). მის ერთ



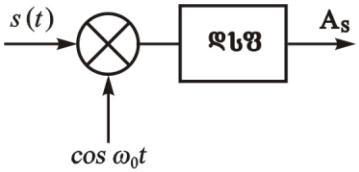
შესასვლეზე მიეწოდება ვიწროზოლოვანი $s(t)$ სიგნალი, ხოლო მეორე შესასვლელზე – დამხმარე რხევა, რომელიც დროში იცვლება $\cos\omega_0 t$ კანონით. გადამამრავლის გამოსასვლელზე მიიღება სიგნალი

$$u_{გამ}(t) = A_s(t)\cos^2\omega_0 t - \tfrac{1}{2}B_s(t)\sin 2\omega_0 t =$$

ნახ. 5.14

$$= \tfrac{1}{2}A_s(t) + \tfrac{1}{2}A_s(t)\cos 2\omega_0 t - \tfrac{1}{2}B_s(t)\sin 2\omega_0 t. \qquad (5.26)$$

გადამამრავლებელიდან გამომავალი სიგნალი გავატაროთ დაბალი სიხშირის ფილტრში (**დსფ**) ნახ. 5.15, რომელიც აღხობს $2\omega_0$ რიგის სიხშირეებს. ნათელია, რომ ფილტრის გამოსასვლელზე იქნება დაბალსიხშირული სინფაზურ ამპლიტუდის პროპორციული $A_s(t)$ რხევა.



ნახ. 5.15

თუ ერთ-ერთ გადამამრავლებელის შესასვლელზე მივაწოდებთ დამხმარე $\sin\omega_0 t$ რხევას, მაშინ ასეთი სისტემა $s(t)$ ვიწროზოლოვანი სიგნალიდან გამოყოფს მის კვადრატურულ $B_s(t)$ ამპლიტუდას.

5.3.2. ვიწროზოლოვანი სიგნალების კომპლექსური წარმოდგენა

ხაზოვან ელექტრულ წრედების თეორიაში ფართოდ გამოიყენება კომპლექსური ამპლიტუდების მეთოდი, რომლის მიხედვით ჰარმონიული რხევა გამოისახება როგორც კომპლექსური ფუნქციის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები:

$$U_m\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \mathrm{Re}\left(U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}\right),$$

$$U_m\sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \mathrm{Im}\left(U_m e^{j\varphi_0} e^{j\omega_0 t}\right).$$

დროზე დამოუკიდებელი სიდიდეს $\dot{U} = U_m e^{j\varphi_0}$ ეწოდება *ჰარმონიული რხევის კომპლექსური ამპლიტუდა*.

ფიზიკური თვალთვა ხედვიდან ვიწროზოლოვანი სიგნალები წარმოადგენენ *კვაზიჰარმონიულ რხევებს*. (კვაზი ნიშნავს "თითქმის" ან "მსგავსი") შევეცადოთ ისე განვაზოგადოთ კომპლექსური ამპლიტუდების მეთოდი, რომ ამ მეთოდის ფარგლებში აღიწეროს (5.25) სახის სიგნალები.

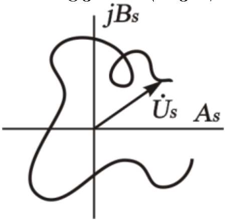
შემოვიტანოთ დაბალსიხშირული კომპლექსური ფუნქცია

$$\tilde{U}_s(t) = A_s(t) + jB_s(t), \tag{5.27}$$

რომელსაც ეწოდება ვიწროზოლოვანი სიგნალის კომპლექსური მოვლები. ადვილია უშვალოდ გავსინჯოთ, რომ

$$s(t) = A_s(t)\cos\omega_0 t - B_s(t)\sin\omega_0 t = \mathrm{Re}\left[\tilde{U}_s(t)e^{j\omega_0 t}\right]. \tag{5.28}$$

ამგვარად, ვიწროზოლოვანი სიგნალის კომპლექსურ მოვლები ასრულებს იგივე როლს, რაც კომპლექსური ამპლიტუდა უბრალო ჰარმონიულ რხევებში. მაგრამ, ზოგად შემთხვევაში, კომპლექსური მოვლები (იხ. ნახ. 5.16) დამოკიდებულია დროზე – ვექტორი $\tilde{U}_s(t)$ კომპლექსურ სიბრტყეზე ასრულებს რაიმე მოძრაობას, და იცვლება როგორც მოდულით, ასევე მიმართულებით.

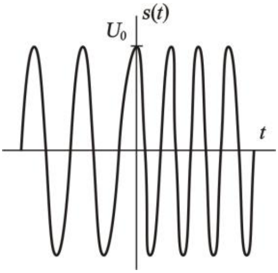


ნახ. 5.16

მაგალითი 5.4. ვიწროზოლოვანი $s(t)$ სიგნალი წარმოადგენს ჰარმონიულ რხევას როცა $t<0$ და როცა $t>0$; $t=0$ დროის მომენტში სიგნალის სიხშირე იზრდება ნახტომით:

$$s(t) = \begin{cases} U_0\cos\omega_0 t, & t<0, \\ U_0\cos\omega_1 t, & t>0. \end{cases}$$

იპოვეთ $s(t)$ სიგნალის (იხ. ნახ. 5.17) კომპლექსური მოვლები.



ნახ. 5.17

ამოხსნა: თუ საყდენ სიხშირეთ ავიღებთ ω_0, მივიღებთ კომპლექსური $\tilde{U}_s(t)$ მოვლების შემდეგ გამოსახულებას:

$$\tilde{U}_s(t) = \begin{cases} U_0, & t<0, \\ U_0 e^{j(\omega_1-\omega_0)t}, & t>0. \end{cases}$$

ხაზი უნდა გაუსვათ იმ გარემოებას, რომ საყდენი სიხშირის ამორჩევა იკარნახება ჩასატარებელი გამოთვლების სიმარტივით. ასე, მაგალითად, თუ განსახილავი სიგნალის საყდენ სიხშირად ავიღებთ $(\omega_0+\omega_1)/2$, მაშინ კომპლექსური $\tilde{U}_s(t)$ მოვლებს ექნება რთული სახე:

$$\tilde{U}_s(t)=\begin{cases} U_0\exp\left[j\dfrac{(\omega_0-\omega_1)}{2}\cdot t\right], & t<0,\\ U_0\exp\left[j\dfrac{(\omega_1-\omega_0)}{2}\cdot t\right], & t>0.\end{cases}$$

═ ═ ═ ═ ═ ═ ═ ═ ═ ═ ═ ═ ═ ═ ═

5.3.3. ფიზიკური მოვლები, სრული ფაზა და მყისიერი სიხშირე

ფორმულა (5.27), რომელიც განსაზღვრავს კომპლექსურ მოვლებს, შესაძლებელია წარმოვიდგინოთ მაჩვენებლიან ფორმაში:

$$\tilde{U}_s(t)=U_s(t)\exp\left[j\varphi_s(t)\right]. \tag{5.29}$$

აქ $U_s(t)$ - დროის ნამდვილი არაუარყოფითი ფუნქციაა, რომელსაც ეწოდება **ფიზიკური მოვლები** (სიმოკლისათვის ხშირად ხმარობენ უბრალოდ **მოვლები**); $\varphi_s(t)$ - დროში ნელა ცვლადებადი წვრილზოლოვანი სიგნალის საწყისი ფაზაა.

სიდიდეები $U_s(t)$ და $\varphi_s(t)$ დაკავშირებული არიან სინფაზური და კვადრატურული ამპლიტუდებთან თანაფარდობებით

$$\begin{aligned} A_s(t)&=U_s(t)\cos\varphi_s t,\\ B_s(t)&=U_s(t)\sin\varphi_s t, \end{aligned} \tag{5.30}$$

საიდანაც გამომდინარეობს ვიწროზოლოვანი სიგნალის მათემატიური მოდელის ჩაწერის კიდევ ერთი სასარგებლო ფორმა:

$$s(t)=U_s(t)\cos\left[\omega_0 t+\varphi_s(t)\right]. \tag{5.31}$$

იმის მსგავსად, როგორც რადიოსიგნალების კუთხური მოდულაციის შესწავლისას, შემოვიტანოთ ვიწროზოლოვანი რხევის **სრული ფაზის** ცნება $\psi_s(t)=\omega_0 t+\varphi_s(t)$ და განვსაზღროთ სიგნალის მყისიერი სიხშირე, რომელიც უდრის სრული ფაზის წარმოებულს დროში:

$$\omega_s(t)=\frac{\mathrm{d}\psi_s(t)}{\mathrm{dt}}=\omega_0+\frac{\mathrm{d}\varphi_s(t)}{\mathrm{d}}. \tag{5.32}$$

(5.31) ფორმულის შესაბამისად ზოგადი სახის ვიწროზოლოვანი სიგნალი წარმოადგენს რთულ რხევას, რომელიც მიიღება გადამტანი ჰარმონიული რხევის როგორც ამპლიტუდის, ასევე ფაზური კუთხის ერთდროული მოდულაციით

5.3.4. ვიწროზოლოვანი სიგნალის ფიზიკური მოვლების თვისებები

(5.30) ფორმულის გამოყენებით, ფიზიკური მოვლები $U_s(t)$ გამოვსახოთ სინფაზური და კვადრატურული ამპლიტუდებით:

$$U_s(t)=\sqrt{A_s^2(t)+B_s^2(t)}. \qquad (5.33)$$

როგორც ზემოთ ავღნიშნეთ, ვიწროზოლოვანი სიგნალის მოვლები არ განისაზღვრება ცალსახათ. თუ (5.28) ფორმულაში, ω_0 სიხშირის ნაცვლად ავიღებთ რაიმე $\omega_0^{/}=\omega_0+\Delta\omega$ სიხშირეს, მაშინ $s(t)$ უნდა წარმოვადგინოთ სახით

$$s(t)=\mathrm{Re}\left[\tilde{U}_s(t)e^{-j\Delta\omega t}e^{j\omega_0^{/}t}\right]$$

და კომპლექსური მოვლების ახალი მნიშვნელობა იქნება

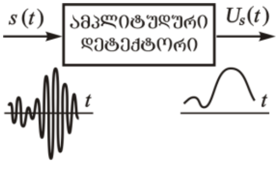
$$\tilde{U}_s^{/}(t)=\tilde{U}_s(t)e^{-j\Delta\omega t}. \qquad (5.34)$$

მაგრამ ამასთან ფიზიკური მოვლები, რომელიც არის კომპლექსური მოვლების მოდული, რჩება უცვლელი, ვინაიდან $\exp(-j\Delta\omega t)$ გამოსახულებას აქვს ერთეულოვანი მოდული.

ფიზიკური მოვლების **სხვა თვისება** მდგომარეობს მასში, რომ დროის თითოეულ მონენტში $s(t)\le U_s(t)$. ამ მტიცებულების ჭეშმარიტება უშვალოდ გამომდინარეობს (5.31) ფორმულიდან. აქ ტოლობის ნიშანი შეესაბამება დროის იმ მომენტებს, როცა $\cos\left[\omega_0 t+\varphi_s(t)\right]=1$. მაგრამ ამასთან წარმოებული სიგნალები და მისი მოვლები ემთხვევიან:

$$s'(t)=U_s'(t)\cos\left[\omega_0 t+\varphi_s(t)\right]-\left[\omega_0 t+\varphi_s'(t)\right]U_s(t)\sin\left[\omega_0 t+\varphi_s(t)\right]$$

მოვლების ცნების მნიშვნელობა განპირობბულია იმით, რომ რადიოტექნიკაში ფართოდ გამოიყენება სპეციალური მოწყობილობები – **ამპლიტუდური დეტექტორები (დემოდულიატორები)**, (ნახ. 5.18) რომლებსაც აქვთ უნარი ზუსტად აღიქვან ვიწროზოლოვანი სიგნალის მოვლები.



ნახ. 5.18

5.3.5. ვიწროზოლოვანი სიგნალის მყისიერი სიხშირის თვისებები

თუ სიგნალის კომპლექსური მოვლები წარმოიდგინება ვექტორად, რომელიც უცვლელი კუთხური Ω სიჩქარით ბრუნავს კომპლექსურ სიბრტყეზე, ანუ $\tilde{U}_s(t)=U_s(t)\exp\left[\pm j\Omega(t)\right]$, მაშინ

(5.32) გამოსახულების შესაბამისად ვიწროზოლოვანი სიგნალის მყისიერი სიხშირე დროში მუდმივი სიდიდეა: $\omega_s = \omega_0 \pm \Omega$.

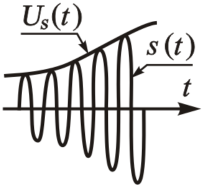
შეგვიძლია ვამტკიცოდ, რომ მსგავსი სიგნალი წარმოადგენს კვაზიჰარმონიულ რხევას, რომელიც მოდულირებულია მხოლოდ ამპლიტუდით, მაგრამ არა ფაზური კუთხით, კერძოდ, თუ ერთ ერთი ამპლიტუდებიდან A_s ან B_s იგივურად გარდაიქმნებიან ნულში, მაშინ დროის ნებისმიერ მომენტში მყისიერი სიხშირე $\omega_s = \omega_0$.

ზოგად შემთხვევაში მყისიერი სიხშირე დროში იცვლება კანონით

$$\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{arc}\,tg\frac{B_s}{A_s} = \omega_0 + \frac{B_s' A_s - A_s' B_s}{A_s^2 + B_s^2}. \qquad (5.35)$$

5.3.6. კავშირი სიგნალის სპექტრებს და მისი კომპლექსური მოვლების შორის

ვთქვათ $G_s(\omega)$ - ვიწროზოლოვანი $s(t)$ სიგნალის (იხ. ნახ. 5.19) სპექტრული სიმკრივის კომპლექსური მოვლებია, რომელსაც, თავის მხრივ, გააჩნია სპექტრული $S(\omega)$ სიმკრივე. ძნელია არ არის დავინახოთ, რომ



$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left[\tilde{U}_s(t)e^{j\omega_0 t}\right]e^{-j\omega t}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_s(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_s^*(t)e^{-j(\omega+\omega_0)t}\mathrm{d}t =$$

ნახ. 5.19

$$= \frac{1}{2}G_s(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} G_s^*(-\omega-\omega_0). \qquad (5.36)$$

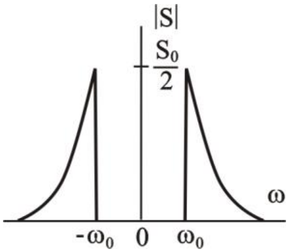
მაშასადამე, ვიწროზოლოვანი სიგნალის სპექტრული სიმკრივე შესაძლებელია ნაპოვნი იყოს კომპლექსური მოვლების გადატანით ნულოვანი სიხშირის მიდამოდან $\pm\omega_0$ წერტილების მიდამოში გადატანით. ყველა სპექტრული მდგენელების ამპლიტუდები ორჯელ მცირდება; უარყოფითი სიხშირეების არეში სპექტრის მისაღებად გამოიყენება კომპლექსური შეუღლების ოპერაცია.

ფორმულა (5.36) სასარგებლოა იმით, რომ ვიწროზოლოვანი სიგნალის ცნობილი სპექტრის მიხედვით შესაძლებელია ვიპოვოთ მისი კომპლექსური მოვლების სპექტრი, რომელიც

თავის მხრივ, განსაზღვრავს მის ფიზიკურ მოვლებს და სიგნალის მყისიერ სიმკრივეს.

(ფიზიკური მოვლები ნამდვილად "მოავლებს" ვიწროზოლოვან სიგნალს და მას გააჩნია ასეთი რხევის მყისიერი ამპლიტუდის აზრი ნახ. 5.19)

მაგალითი 5.5. როცა $\omega > 0$, ვიწროზოლოვან ნამდვილ $s(t)$ სიგნალს (იხ. ნახ. 5.20), გააჩნია სპექტრული სიმკრივე, რომელიც არასიმეტრიულია ω_0 სიხშირის მიმართ:

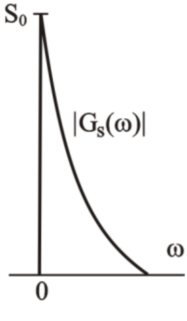


ნახ. 5.20

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < \omega_0, \\ \frac{1}{2} S_0 e^{-b(\omega-\omega_0)}, & \omega \geq \omega_0 . \end{cases}$$

ამოხსნა: (5.36) ფორმულის საფუძველზე კომპლექსური მოვლების სპექტრული სიმკრივეა

$$G_S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < 0, \\ S_0 e^{-b\omega}, & \omega \geq \omega_0 . \end{cases}$$



ნახ. 5.21

ფურიეს უკუ გარდაქმნის გამოყენებით, ვპოულობთ მის კომპლექსურ მოვლებს

$$\tilde{U}_s(t) = \frac{S_0}{2\pi} \int_0^\infty e^{(-b+jt)\omega} \mathrm{d}\omega = \frac{S_0}{2\pi(b-jt)}.$$

გამოსაკვლევი სიგნალის სიმფაზური და კვადრატურული ამპლიტუდების მოსანახათ, გამოვყოთ ნამდვილი და წარმოსახვითო ნაწილები:

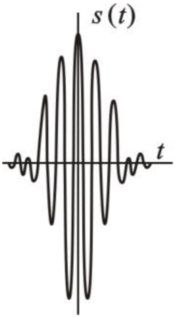
$$A_s(t) = \frac{bS_0}{2\pi(b^2+t^2)}; \quad B_s(t) = \frac{tS_0}{2\pi(b^2+t^2)}.$$

განსახილავი სიგნალის ფიზიკური მოვლები

$$U_s(t) = \left|\tilde{U}_s(t)\right| = \frac{S_0}{2\pi\sqrt{b^2+t^2}}.$$

მყისიერი სიხშირეს $\qquad \omega_s(t) = \omega_0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathrm{arc}\,tg \frac{t}{b} = \omega_0 + \frac{b}{b^2+t^2}$

უდიდესი მნიშვნელობა აქვს როცა $t = 0$, ანუ $\omega_s(t) = \omega_0 + \frac{1}{b}$.



$s(t)$ რხევის ოსცილოგრამა (იხ. ნახ, 5.22) წარმოადგენს სიმეტრიულ რადიოიმპულს დროში არამუდმივი შევსების სიხშირით.