ლექცია 27-28

6.2. შემთხვევითი სიდიდეების სისტემების სტატისტიკური მახასიათებლები

მიღებულია, რომ შემთხვევითი სიგნალების თვისებები აღიწეროს არა მარტო იმ თვისებების განხილვით, რომელთა დაკვირვება ხდება დროის რომელიღაც მომენტში, არამედ ამ სიდიდეების ერთობლიობების შესწავლით, რომლებიც მიეკუთვნება დროის სხვადასხვა ფიქსირებულ მომენტებს. გადავიდეთ მსგავსი მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეების თეორიაზე.

6.2.1. განაწილების ფუნქცია და ალბათობის სიმკვრივე

ვთქვათ მოცემულია შემთხვევითი სიდიდეები $\left\{X_1, X_2, ..., X_n\right\}$, რომლებიც ქმნიან $n-$განზომილებიან შემთხვევით ვექტორს X. ერთგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიით ამ ვექტორის განაწილების ფუნქცია

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, ..., X_n \le x_n).$$

მისი მოპასუხე – n განზომილებიანი სიმკვრივის ალბათობა $p(x_1, x_2, ..., x_n)$ აკმაყოფილებს თანაფარდობას

$$p(x_1, x_2, ..., x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_n =$$
$$= P\left\{x_1 < X_1 \le x_1 + \mathrm{d}x_1, ..., x_n < X_n \le x_n + \mathrm{d}x_n\right\}.$$

ცხადია, განაწილების ფუნქცია შეიძლება ნაპოვნი იყოს ალბათობის სიმკვრივის ინტეგრირების გზით:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} ... \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n,) d\xi_1 d\xi_2 ... d\xi_n .$$

ნებისმიერ მრავალგანზომილებიან სიმკვრივეს გააჩნია თვისებები, დამახასიათებელი ალბათობის სიმკვრივისათვის:

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) \ge 0; \qquad \int\limits_{-\infty}^{x_1} ... \int\limits_{-\infty}^{x_n} p(x_1, x_2, ..., x_n,)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2...\mathrm{d}x_n = 1.$$

თუ გვეცოდინება $n-$განზომილებიანი სიმკვრივე, ყოველთვის შეიძლება ვიპოვოთ $m-$განზომილებიანი სიმკვრივე, როცა $m < n$, ”ზედმეტი” კოორდინატების მიხედვით ინტეგრირებით:

$$p(x_1, x_2, ..., x_m) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1, x_2, ..., x_n,)\,\mathrm{d}x_{m+1}...\mathrm{d}x_n;$$

6.2.2. ᲛᲝᲛᲔᲜᲢᲔᲑᲘᲡ ᲒᲐᲛᲝᲗᲕᲚᲐ

თუ გვაქვს ალბათობის შესაბამისი მრავალგანზომილებიანი სიმკვრივე, შეიძლება ვიპოვოთ განსახილველი შემთხვევითი სიდიდეებიდან ნებისმიერი კომბინაციის საშუალო მნიშვნელობები, და კერძოდ, გამოვთვალოთ მათი მომენტები. ამგვარად, თუ შემოვიფარგლებით მომავლისათვის უფრო მნიშვნელოვანი ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდის შემთხვევით, (6.4)-ის და (6.7)-ის ანალიგიით ვიპოვით მათემატიკურ მოლოდინებს

$$\overline{x_1} = \int_{-\infty}^{\infty}\int x_1 p(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2;$$

$$\overline{x_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int x_2 p(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2; \qquad (6.18)$$

და დისპერსიებს

$$\sigma_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int \left(x_1 - \overline{x_1}\right)^2 p(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2,$$

$$\sigma_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int \left(x_2 - \overline{x_2}\right)^2 p(x_1, x_2)dx_1dx_2.$$

(6.19)

ერთგანზომილებიან შემთხვევასთან შედარებით ახალს აქ წარმოადგენს მეორე რიგის შერეული მომენტის წარმოქმნის შესაძლებლობა

$$K_{12} = \overline{x_1 x_2} = \int_{-\infty}^{\infty}\int x_1 x_2 p(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \qquad (6.20)$$

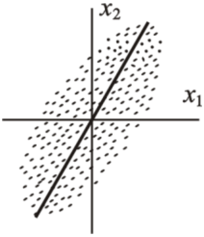
რომელსაც უწოდებენ ორი შემთხვევითი სიდიდის სისტემის ***კოვარიაციონულ მომენტს***.

6.2.3. ᲙᲝᲠᲔᲚᲐᲪᲘᲐ

დავუშვათ, რომ ჩატარებულია ცდების სერია, რომელთა შედეგად ყოველდროს შეინიშნებოდა ორგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდე $\{X_1, X_2\}$. პირობითად ყოველი ცდის წარმომავლობა გამოვსახოთ წერტილით დეკარტის სიბრტყეზე.

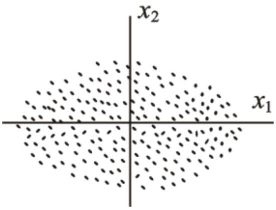
შეიძლება აღმოჩნდეს, რომ გამომსახველობითი წერტილები საშუალოდ განლაგებულნი იყვნენ ზოგიერთი წრფის გასწვრივ (იხ. ნახ. 6.7), ასე რომ სიდიდის ყოველი ცალკეული გა-

მოცდისას x_1 და x_2 ***ყველაზე ხშირად ექნებათ ერთნაირი ნიშანი.*** მას მივყავართ იმის მოსაზრებამდე, რომ x_1-სა და x_2-ს შორის არსებობს სტატისტიკური კავშირი, რომელსაც ეწოდება *კორელაცია*.



ნახ. 6.7

თუმცაღა შესაძლებელია სიბრტყეზე წერტილთა ქაოტური განლაგების შემთხვევა (იხ. ნახ. 6.8).



ნახ. 6.8

ამბობენ, რომ ამ დროს განსახილველი სიდიდეები *არაკორელირებულია*, ე.ი. მათ შორის არ არსებობს მდგრადი კავშირი, ალბათური აზრით.

ორი შემთხვევითი სიდიდის სტატისტიკური კავშირის ხარისხის რაოდენობრივ მახასიათებელს წარმოადგენს მათი კოვარიაციონური მომენტი K_{12} ან, რაც ხშირად უფრო მოსახერხებელია, *კორელაციონური მომენტი* R_{12}, განსაზღვრული როგორც ნამრავლის საშუალო მნიშვნელობა $(x_1-\overline{x}_1)(x_2-\overline{x}_2)$:

$$R_{12}=\int_{-\infty}^{\infty}\int(x_1-\overline{x}_1)(x_2-\overline{x}_2)\,p(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=K_{12}-\overline{x}_1\overline{x}_2 \qquad (6.21)$$

შემოაქვთ ასევე *კორელაციის უგანზომილებო კოეფიციენტი*

$$r_{12}=R_{12}/(\sigma_1\sigma_2). \qquad (6.22)$$

იმ შემთხვევითი სიდიდეებისთვის, რომლებიც ერთმანეთს ემთხვევიან, როცა $x_1=x_2$, ადგილი აქვს ტოლობას

$$R_{11}=R_{22}=\sigma^2, \qquad r_{11}=r_{22}=1.$$

თუ შემთხვევითი ვექტორის განზომილება ორზე მეტია, მაშინ შეიძლება ავაგოთ ყველა შესაძლებელი ჯვარედინი კორალაციონური მომენტები

$$R_{ij}=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\overline{x}_i)(x_j-\overline{x}_j)\,p(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_n,\ \text{სადაც}\ i,j=1,2,\ldots,n,$$

და კორელაციის კოეფიციენტები $r_{ij}=R_{ij}/(\sigma_i\sigma_j).$, რომლებიც ერთიანდება შემდეგი მატრიცის შესაბამისად

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ . & . & . & . \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix}, \qquad r = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2n} \\ . & . & . & . \\ r_{n1} & r_{n1} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ ყოველთვის $|r_{ij}| \le 1$, ამასთან ტოლობა შესაძლებელია მხოლოდ $x_i = \pm x_j$ პირობისას (მთლიანად კორელირებული სიდიდეები).

6.2.4. შემთხვევითი სიდიდეების სტატისტიკური დამოუკიდებლობა

განმარტების თანახმად, შემთხვევითი სიდიდეები $X_1, X_2, ..., X_n$ *სტატისტიკურად დამოუკიდებელია*, თუ მათი მრავალგანზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივე შეიძლება წარმოდგენილი იყოს შესაბამისი ერთგანზომილებიანი სიმკვრივეების ნამრავლის სახით:

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2)\cdots p_n(x_n). \qquad (6.23)$$

სტატისტიკურად დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები ერთმანეთთან არაკორელირებულია. მართლაც, მათთვის

$$R_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \overline{x_i}) p_i(x_i) \mathrm{d}x_i \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \overline{x_j}) p_j(x_j) \mathrm{d}x_j = 0$$

როცა $i \ne j$. ზოგად შემთხვევაში არასწორია უკუ მტკიცება: არაკორელირებულობიდან ავტომატურად არ გამომდინარეობს შემთხვევითი სიდიდეების დამოუკიდებლობა.

6.2.5. მრავალგანზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდეების ფუნქციონალური გარდაქმნები

დავუშვათ, რომ ორი შემთხვევითი $\vec{X}$ და $\vec{Y}$ ვექტორის შემდგენები დაკავშირებულია ცალსახა დამოკიდებულებით

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = f_n(x_1, x_2, ..., x_n),$$

ამასთან ცნობილია უკუ ფუნქციები

$$x_1 = g_1(y_1, y_2, ..., y_n),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = g_n(y_1, y_2, ..., y_n).$$

საწყისი ალბათობის სიმკვრივე $p_{საწ}(x_1,x_2,...,x_n)$ მოცემულია. იმისათვის, რომ განვაზოგადოთ ფორმულა (6.11) მრავალგანზომილებიან შემთხვევაზე და გამოვთვალოთ **გარდაქმნილი** ვექტორის ალბათობის სიმკვრივე $p_{გარ}(y_1,y_2,...,y_n)$, საჭიროა ვიპოვოთ **გარდაქმნის იაკობიანი** (იაკობიანი წარმოადგენს პროპორციულობის კოეფიციენტს ელემენტარულ მოცულობებს შორის ფუნქცი ონალური გარდაქმნისას)

$$D=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \dfrac{\partial g_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \qquad (6.24)$$

მაშინ საძიებელი ალბათობის სიმკვრივე

$$p_{გარ}(y_1,y_2,...,y_n)=p_{საწ}(g_1,g_2,...,g_n)\cdot|D|. \qquad (6.25)$$

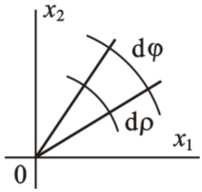
მაგალითი 6.4. *ვთქვათ x_1 და x_2 და სიბრტყეზე ვექტორის ბოლოს შემთხვევითი კოორდინატებია* (იხ. ნახ. 6.9).

გადავიდეთ პოლარულ კოორდინატებზე (ρ,φ):

$$x_1=\rho\cos\varphi,\qquad x_2=\rho\sin\varphi,\qquad \begin{cases} 0\le\rho<\infty \\ 0\le\varphi<2\pi. \end{cases}$$

ასეთი გარდაქმნის იაკობიანი

$$D=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\cos\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho.$$



ნახ. 6.9

ამიტომ თუ მოცემულია ალბათობის სიმკვრი ვე $p_{საწ}(x_1,x_2)$, მაშინ $p_{გარ}(\rho,\varphi)=\rho\, p_{საწ}(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)$.

6.2.6. მრავალგანზომილებიანი გაუსის განაწილება

დავუშვათ, რომ $\vec{X}=\{X_1,X_2,...,X_n\}$ –განზომილებიანი შემთხვევითი სიდიდისთვის ცნობილია საშუალო მნიშვნელობების $m_1,m_2,...,m_n$ და $\sigma_1^2,\sigma_2^2,...,\sigma_n^2$ დისპერსიების ერთობლიობანი, ასევე კორელაციის კოეფიციენტების მატრიცა r.

ზოგად შემთხვევაში ეს ცნობები არასაკმარისია n-განზომილებიანი ალბათობის სიმკვრივის ასაგებად .გამონაკლისს წარმოადგენს შემთხვევა, როცა $\vec{X}$ – მრავალგანზომილებიანი გაუსის სიდიდეა. მაშინ, განმარტების თანახმად

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sigma_1 ... \sigma_n (2\pi)^{n/2} \left| r^{1/2} \right|} \times \\ \times \exp\left[-\frac{1}{2|r|} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{(x_i - m_i)(x_j - m_j)}{\sigma_i \quad \sigma_i} \right], \tag{6.26}$$

სადაც $|r|$ - r მატრიცის განმსაზღვრელია; A_{ij} - $|r|$ განმსაზღვრელის ელემენტის ალგებრული დამატება r_{ij} .

გაუსის განაწილების მნიშვნელოვანი თვისება მდგომარეობს შემდეგში. ვთქვათ ვექტორი $\vec{X}$ შექმნილია არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებით, ასე რომ r მატრიცაში ნულისგან განსხვავებულია მხოლოდ ელემენტები მთავარ დიაგონალზე: $r_{ij} = \sigma_{ij}$ ამასთან $|r| = 1$, ალგებრული დამატება $A_{ij} = \sigma_{ij}$, ხოლო σ_{ij} არის კრონეკერის სიმბოლო და $\sigma_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$.

წარმოვადგინოთ ეს სიდიდეები (6.26)-ში, მივიღებთ

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\sigma_1 ... \sigma_n (2\pi)^{n/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - m_i)^2 (x_j - m_j)}{\sigma_i^2} \right] =$$

$$= p(x_1) p(x_2) ... p(x_n),$$

სადაც თითოეულს ერთგანზომილებიან გაუსის განაწილებებიდან აქვს პარამეტრები m_i, σ_i . .

ამრიგად, თუ გაუსის ერთობლიობა შექმნილია არაკორელირებული შემთხვევითი სიდიდეებით, მაშინ ყველა ისინი სტატისტიკურად დამოუკიდებელია.

შემდგომში ხშირად გამოიყენება ორგანზომილებიანი გაუსის ალბათობის სიმკვრივე

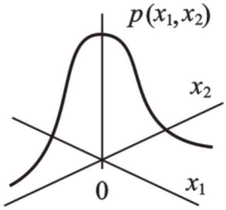
$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1{}^2}-2r\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2{}^2}\right]\right\} \quad (6.27)$$

სადაც $r=r_{12}=r_{21}$ - x_1 და x_2 შემდგენების კორელაციის კოეფიციენტებია.

ეს ფორმულა მარტივდება, თუ $m_1=m_2=0$ და $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$:

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-r^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma^2}(x_1^2-2rx_1x_2+x_2^2)\right]. \quad (6.28)$$

მსგავსი ალბათობის სიმკვრივე აისახება გლუვი ზედაპირით (იხ. ნახ. 6.10), რომელიც აგებულია (x_1,x_2) კოორდინატულ სიბრტყეზე. სიდიდე $p(x_1,x_2)$ აღწევს მაქსიმუმს კოორდინატთა სათავეში. ზედაპირის კონფიგურაცია დამოკიდებულია კორელაციის r კოეფიციენტზე.



ნახ. 6.10

6.2.7. მრავალგანზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქცია

მახასიათებელ ფუნქციათა ცნებების განზოგადებას წარმოადგენს შესაბამისი ალბათობის სიმკვრივის ფურიეს n-განზომილებიანი გარდაქმნა:

$$\Theta(v_1,v_2,...,.v_n)=\overline{\exp\left[j\left(x_1v_1+x_2v_2+...+x_nv_n\right)\right]}=$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left[j\left(x_1v_1+...+x_nv_n\right)\right]p\left(x_1,...,x_n\right)dx_1...dx_n \quad (6.29)$$

მრავალგანზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქცია აღწერს შემთხვევითი სიდიდეების სისტემას სისრულის იმავე ხარისხით, რასაც მისი მოპასუხე ალბათობის სიმკვრივე, რომელიც გამოისახება ფურიეს გარდაქმნით:

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(v_1, ..., v_n) \exp\left[-j\left(x_1 v_1 + ... + x_n v_n\right)\right] dv_1 ... dv_n \qquad (6.30)$$

თუ $\{X_1, ..., X_n\}$ სტატისტიკურად დამოუკიდებელი სიდიდეების ერთობლიობაა, მაშინ (6.29)-ის საფუძველზე მრავალგანზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქცია იშლება ცალკეული შემთხვევითი სიდიდეების ერთგანზომილებიან მახასიათებელ ფუნქციებად:

$$\Theta(v_1, v_2 ..., v_n) = \prod_{i=1}^{n} \Theta_i(v_i) \qquad (6.31)$$

(ფუნქციის წარმოდგენას თანამამრავთა ნამრავლის სახით ეწოდება ამ ფუნქციის ფაქტორიზაცია)

შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მრავალგანზომილებიან გაუსის შემთხვევით სიდიდეს $\vec{X} = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ პასუხობს მახასიათე-ბელი ფუნქცია

$$\Theta(v_1, v_2 ..., v_n) = \exp\left[j\sum_{k=1}^{n} m_k v_k - \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{n} \sigma_k \sigma_i r_{ki} v_k v_i \right] \qquad (6.32)$$

სადაც m_k და σ_k^2 X_k შემთხვევითი სიდიდის საშუალო მნიშვნე-ლობა და დისპერსიაა, r_{ki} კორელაციური მატრიცის ელემენტი.

6.2.8. შემთხვევით სიდიდეთა ჯამის ალბათობის სიმკვრივე

თუ (6.29) ფორმულაში დავუშვებთ $v_1 = v_2 = ... = v_n = v$, მაშინ მრავალგანზომილებიანი მახასიათებელი ფუნქცია გადადის $x_1 + x_2 + ... + x_n$ ჯამის ერთგანზომილებიან მახასიათებელ ფუნქციაში:

$$\Theta_\Sigma(v) = \overline{\exp jv(x_1 + x_2 + ... + x_n)}.$$

აქედან, თუ შევასრულებთ ფურიეს უკუგარდაქმნას, შეიძლება ვიპოვოთ ამ ჯამის ალბათობის სიმკვრივე. მაგალითად, თუ $\{X_1, ..., X_n\}$ გაუსის არაკორელირებული (და მაშასადამე დამოუკიდებელიც)) შემთხვევითი სიდიდეებია თითოეული m_k, σ_k პარამეტრებით, მაშინ (6.32)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\Theta(v) = \exp\left[jv\sum_{k=1}^{n} m_k - \frac{1}{2}v^2 \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2 \right]. \qquad (6.33)$$

(ეს არის მახასიათებელი ფუნქციის თვისება)

ამ შედეგის შედარებით (6.16) ფორმულასთან ვრწმუნდებით, რომ ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეების ჯამი განაწილებულია ასევე ნორმალურად, ამასთან შესაკრებთა მათემატიკური მოლოდინი და დისპერსია ჯამდება:

$$m_\Sigma = \sum_{k=1}^{n} m_k, \qquad \sigma_\Sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} m\sigma_k^2. \qquad (6.34)$$

ალბათობის თეორიაში მტკიცდება გაცილებით უფრო ძლიერი დებულება, რომელიც წარმოადგენს ა.მ. ლიაპუნოვის ცენტრალური ზღვრული თეორემის არსს [21]. ამ თეორემის თანახმად, დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების ჯამის განაწილება, რომელთა დისპერსიები სასრულია, ხოლო ალბათობის განაწილებანი ნებისმიერი, ზოგიერთი შეზღუდვებისას, როგორც წესი, შესრულებად ფიზიკურ ამოცანებში, შესაკრებთა რიცხვის ზრდით მიისწრაფის გაუსისკენ.