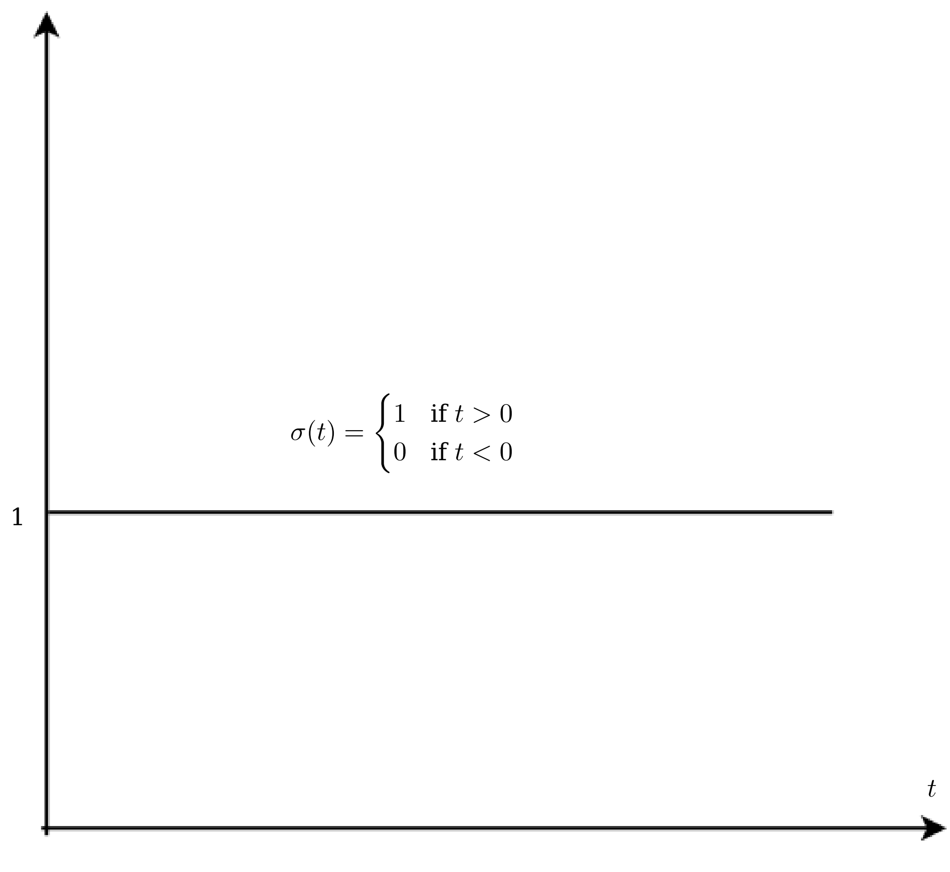
ჰევისაიდის და დელტა ფუნქციები

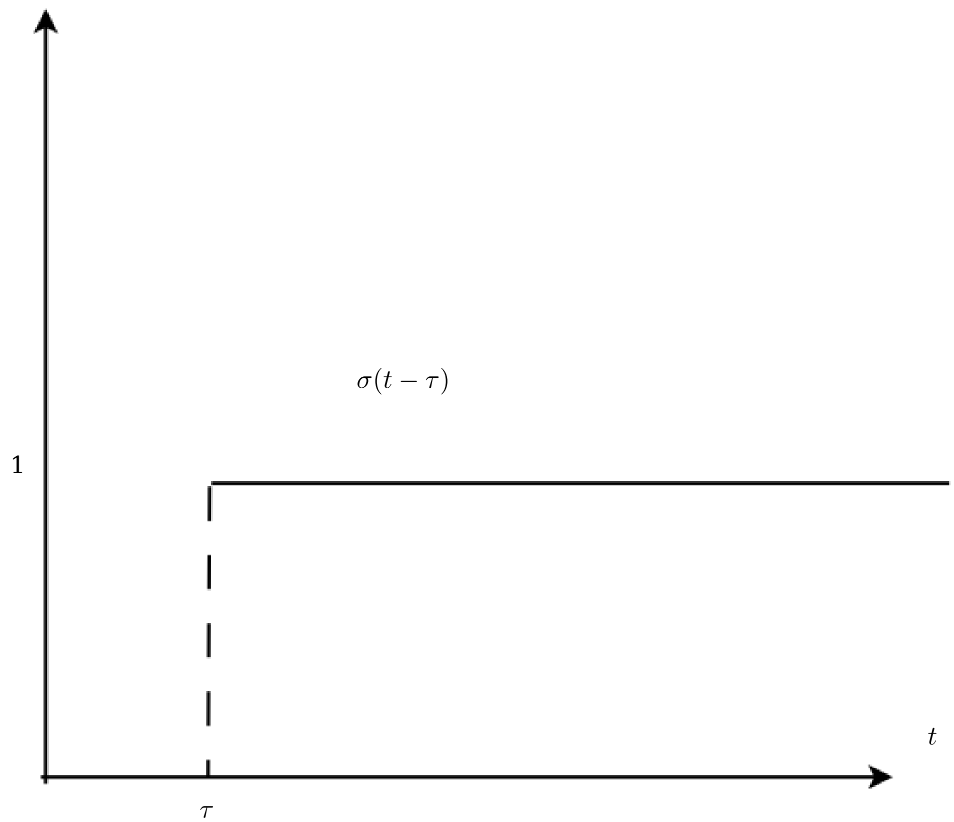
ლევან შოშიაშვილი
ელექტრული და ელექტრონული ინჟინერიის დეპარტამენტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
ივ. ჯავახიშვილის თბილისის სახ. უნივერსიტეტი,

11 აპრილი, 2013

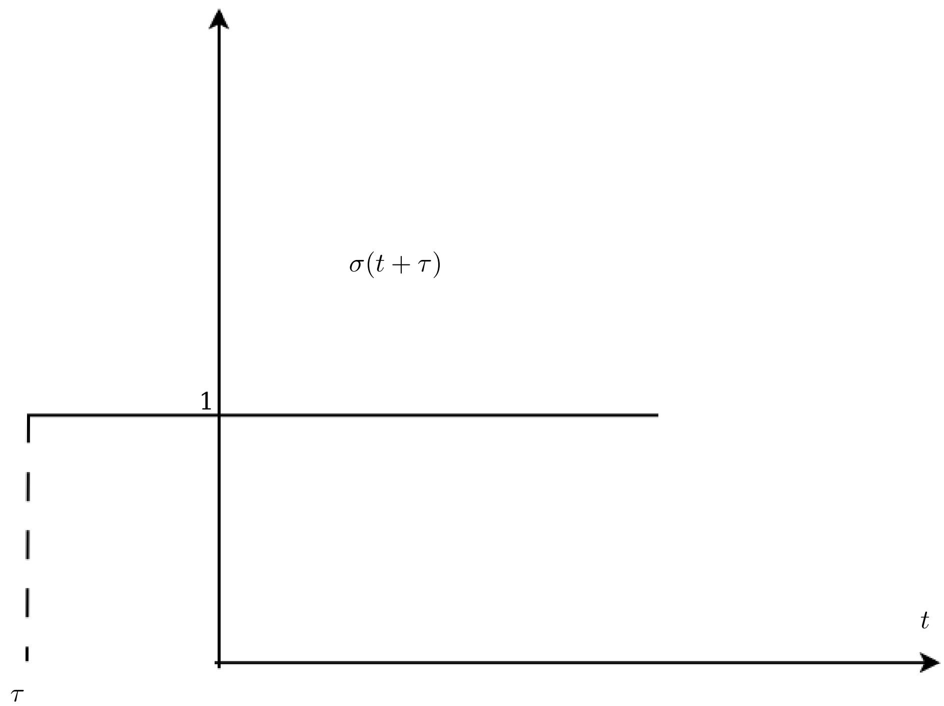
ჰევისაიდის ფუნქცია



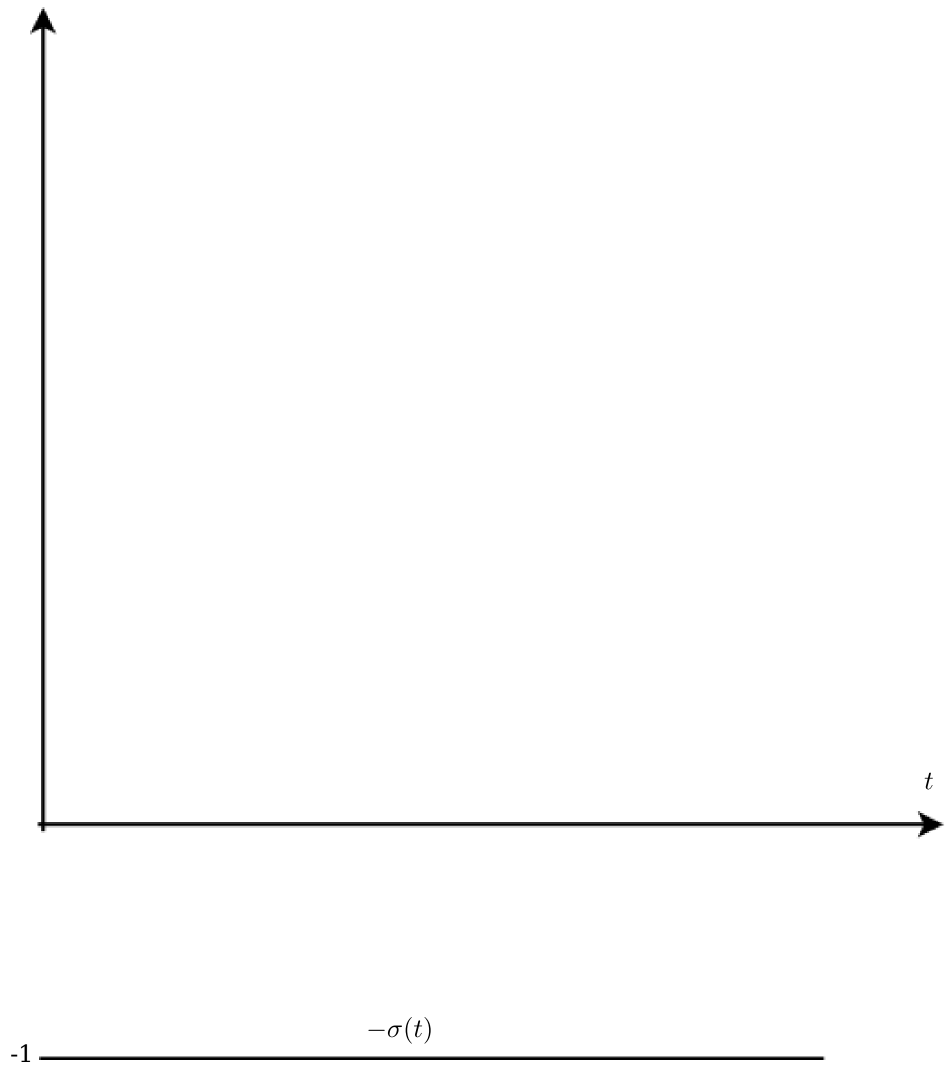
სურ 1: ჰევისაიდის ფუნქცია $\sigma(t)$



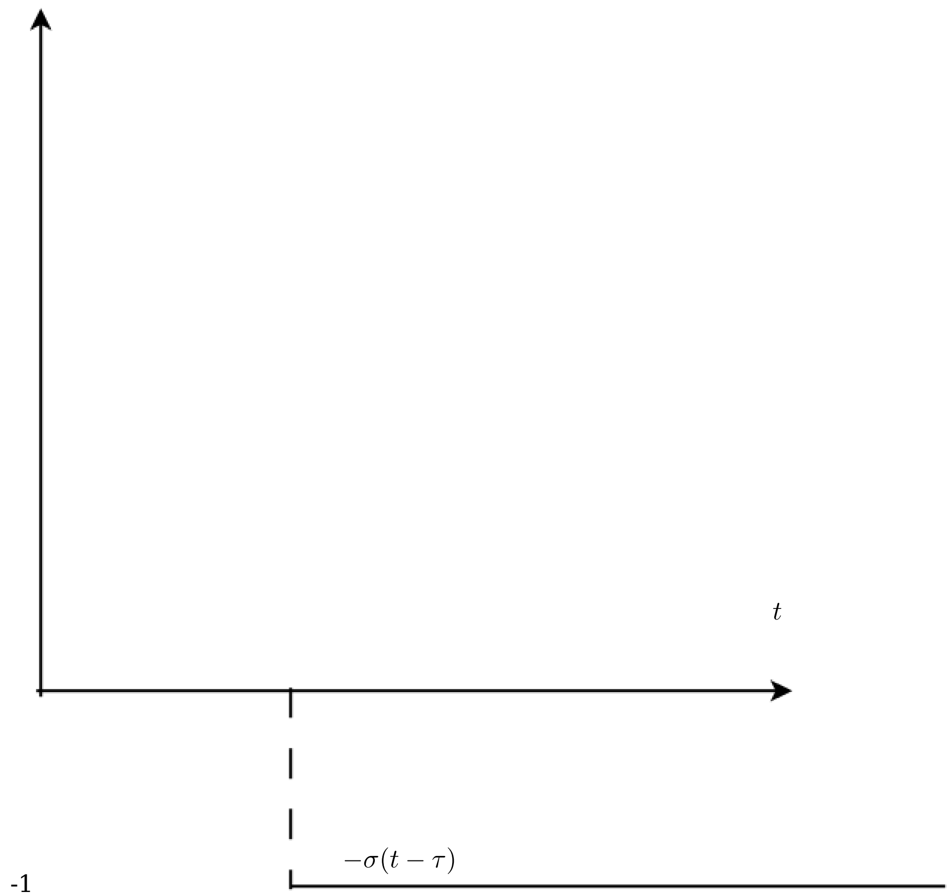
სურ 2: ჰევისაიდის ფუნქცია $\sigma(t-\tau)$



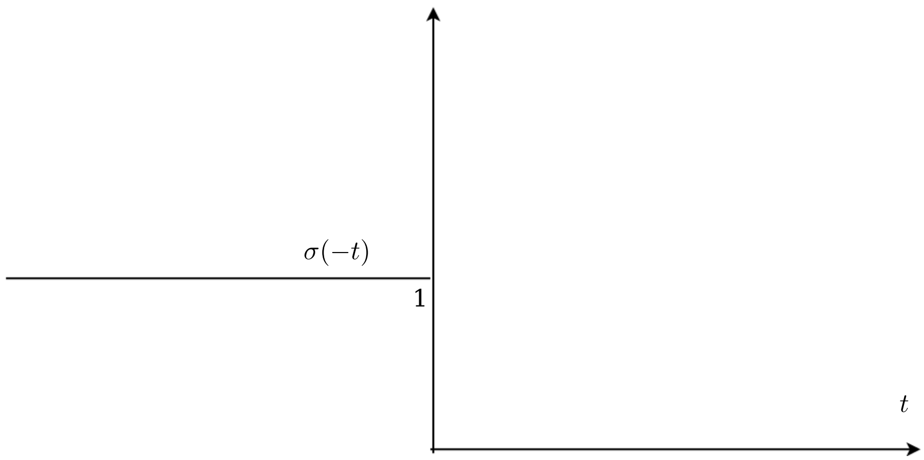
სურ 3: ჰევისაიდის ფუნქცია $\sigma(t+\tau)$



სურ 4: ჰევისაიდის ფუნქცია $-\sigma(t)$

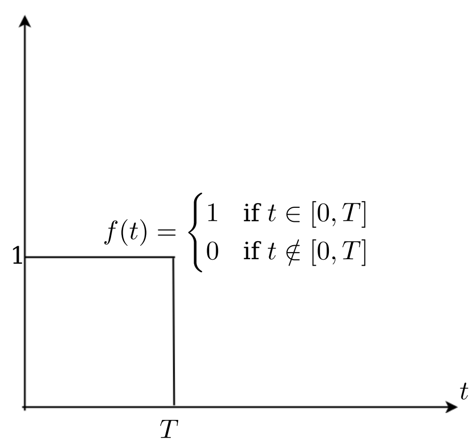


სურ 5: ჰევისაიდის ფუნქცია $-\sigma(t-\tau)$

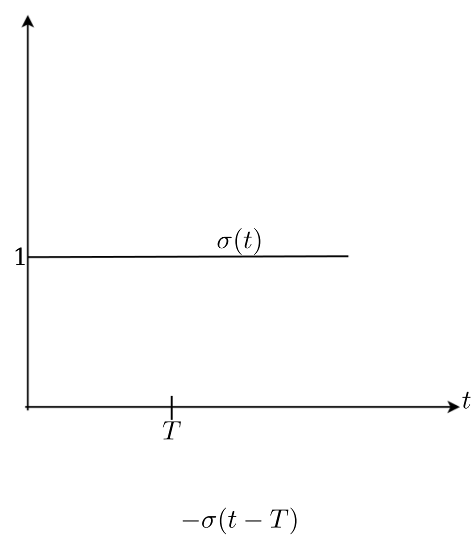


სურ 6: ჰევისაიდის ფუნქცია $\sigma(-t)$

მაგალითი 1



სურ 7: მართკუთხა იმპულსი

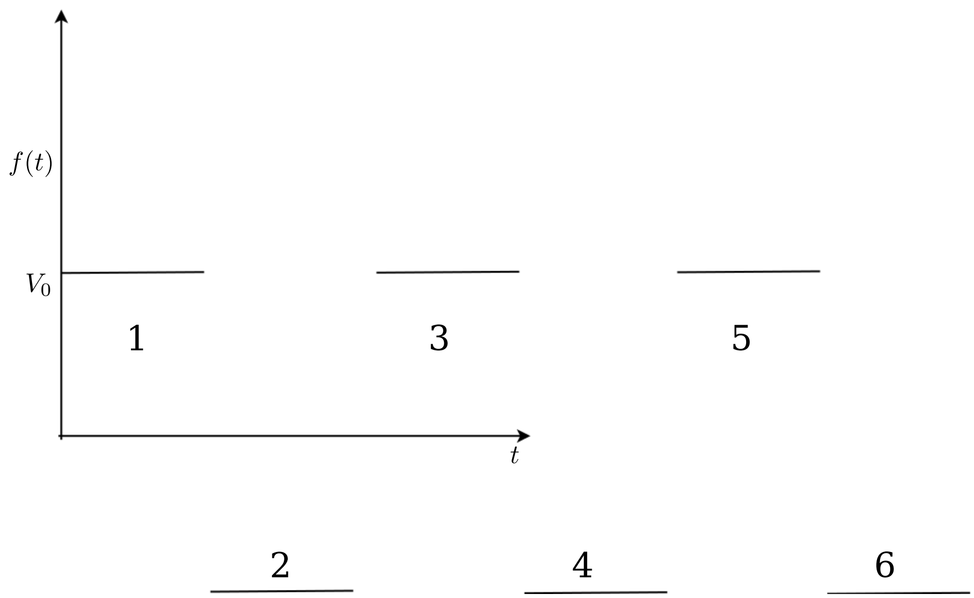


სურ 8: მართკუთხა იმპულსის გაშლა ჰევისაიდის ფუნქციებად

სურ.7 გამოსახული მართკუთხედი იმპულსი T ხანგძლივობით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ორი ჰევისაიდის ფუქციების ჯამი:

$$f(t) = \sigma(t) + (-\sigma(t - T))$$

მაგალითი 2



სურ 9: პერიოდული იმპულსი

გამოვსახოთ სურ.9 გამოსახული იმპულსი ჰევისაიდის ფუნქციების საშუალებით. **მაგალითი 1** მართკუთხა იმპულსი გამოსახული იყო ჰევისაიდის ფუნქციის საშუალებით. სურ.9-ზე გამოსახული ფუნქცია არის ზემოთ მოყვანილი მართკუთხა იმპულსების მიმდევრობა ოღონდ $T \cdot n$ მომენტებში როცა n ლუწია იცვლის ნიშანს.

$$f(t) = \begin{cases} V_0 & \text{if} t \in [T \cdot n, T \cdot (2n+1)] \\ -V_0 & \text{if } t \notin [T \cdot n, T \cdot (2n+1)] \end{cases} \text{ სადაც} n = 0, 1, 2 \dots \tag{1}$$

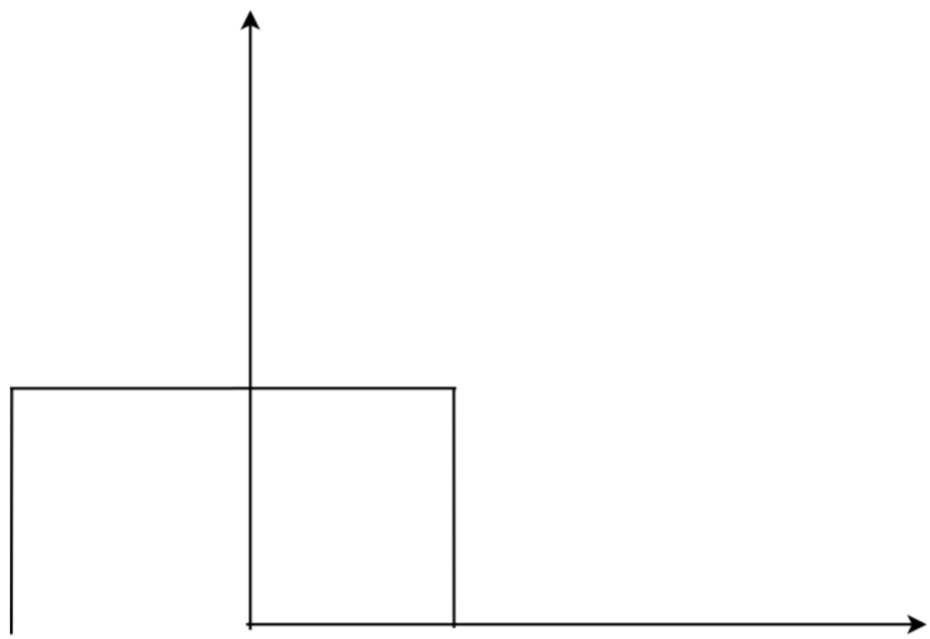
გამოვსახოთ $n = 0, 1, 2 \dots$ იმპულსები მართკუთხა იმპულსის საშუალებით:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 \cdot (\sigma(t) - \sigma(t - T)) \\ V_2 &= V_0 \cdot (-\sigma(t - T) + \sigma(t - 2T)) \\ V_3 &= V_0 \cdot (\sigma(t - 2T) - \sigma(t - 3T)) \\ V_4 &= V_0 \cdot (-\sigma(t - 3T) + \sigma(t - 4T)) \\ V_5 &= V_0 \cdot (\sigma(t - 4T) - \sigma(t - 5T)) \end{aligned}$$

შევკრიბოთ V_i. მივიღებთ

$$\begin{aligned}f(t) = \sum V_i =&V_0\{\sigma(t) - \sigma(t-T) - \sigma(t-T) + \sigma(t-2T) + \sigma(t-2T) - \sigma(t-3T)-\\ &-\sigma(t-3T) + \sigma(t-4T) + \sigma(t-4T) - \sigma(t-5T) + \cdots\} =\\ &=V_0\{\sigma(t) - 2\cdot\sigma(t-T) + 2\cdot\sigma(t-2T) - 2\cdot\sigma(t-3T) + \cdots\} =\\ &=V_0\{\sigma(t) + 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\sigma(t-n\cdot T)\cdot(-1)^n\}\end{aligned} \tag{2}$$

მაგალითი 3

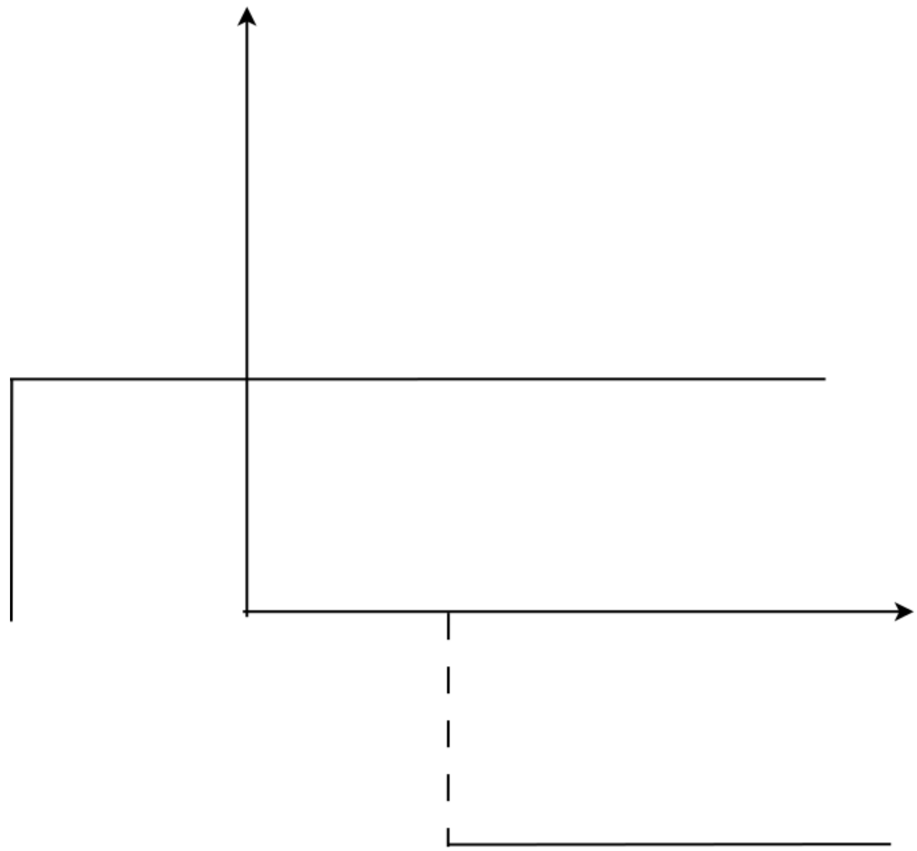


სურ 10: მართკუთხა იმპულსი ამპლიტუდა V_0 ხანგძლივობა T

$$f(t) = V_0\sigma(t+T/2) - V_0\sigma(t-T/2) \tag{3}$$

ეს ტოლობა მოცემულია ნახაზზე:

დავალება 1: დაწერეთ ანალიზური ფორმულა როცა ეს იმპულსი მეორდება τ პერიოდით



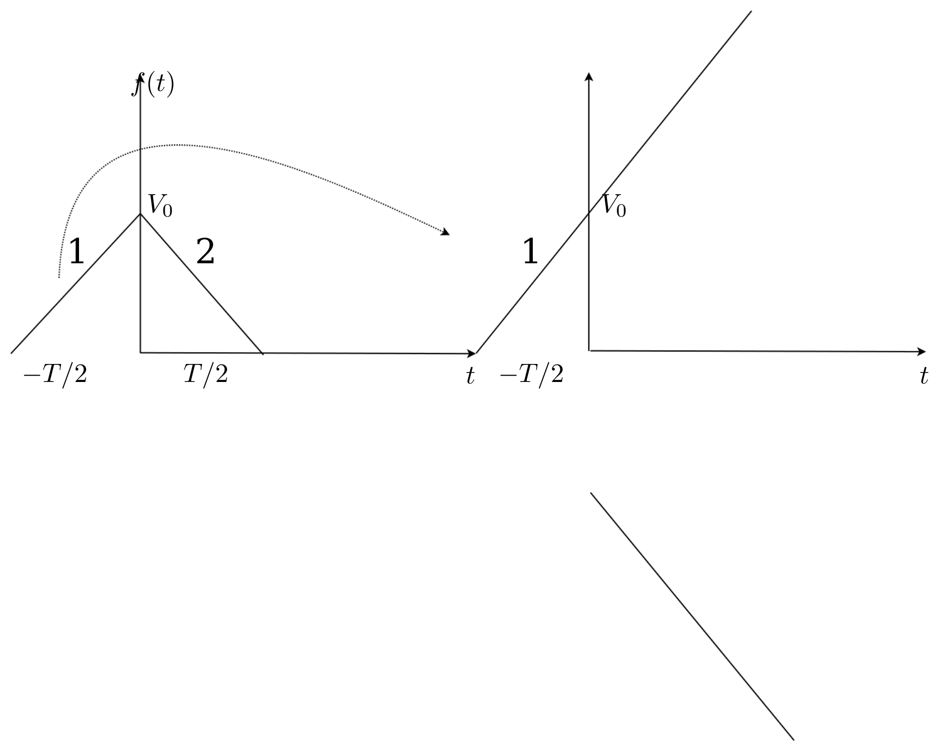
სურ 11: ფორმულა(3) მართკუთხა იმპულსის გაშლა

მაგალითი 4

სურ.12-ზე გამოსახული იმპულსი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც (1) და (2) იმპულსების ჯამი. ამასთან (1) მონაკვეთი(იმპულსი) შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:
ესაა წრფის ნაწილი კოორდინატებით $(-T/2, 0)$,$(0, V_0)$. ამ წრფის განტოლებაა

$$y = V_0/(T/2) \cdot t + V_0$$

ვინაიდან იპულსი იწყება $-T/2$ მომენტში ეს განტოლება უნდა გავამრავლოთ $\sigma(t + T/2)$, მაგრამ ეს იქნება სხივი რომელიც იწყება $(-T/2, 0)$ და გრძელდება უსასრულობამდი ზემოტმოყვანილი წრფის განტოლების მიხედვით. იმისათვის რომ მივიღოთ მონაკვეთი $(-T/2, 0)$,$(0, V_0)$ ამ სხივის განტოლებას უნდა გამოვაკლოთ მეორე სხივი როემლიც იწყება $(0, V_0)$ და მოდულით ტოლია მოცემული სხივისა. ეს გრაფიკულად ნაჩვენებია ნახაზზე მარჯვნივ. ამ, მეორე სხივის, განტოლება



სურ 12: სამკუთხედი იმპულსი ამპლიტუდა V_0 ხანგძლივობა T

იქნება:

$$y = (-V_0/(T/2) \cdot t - V_0) \cdot \sigma(t)$$

ამრიგად, პირველი მონაკვეთის განტოლებაა:

$$V_1 = V_0 \left(\frac{2}{T} + 1 \right) \sigma(t + T/2) - V_0 \left(\frac{2}{T} + 1 \right) \sigma(t)$$

რაც შეეხება მეორე მონაკვეთს ((2)-სურ.12) ეს იგივეა რაც პირველი მონაკვეთი ოღონდ უარყოფითი დახრის კუთხის ტანგენსით.და იწყება 0 და გრძელდება $T/2$. ანუ მეორე მონაკვეთის განტოლებაა:

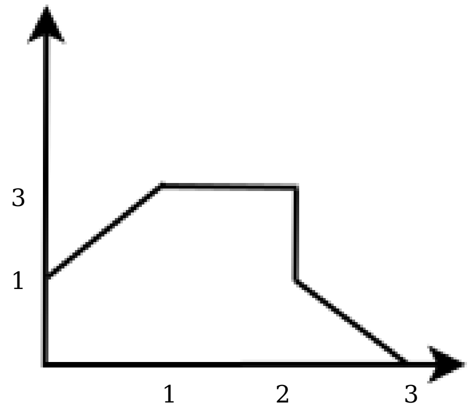
$$V_2 = V_0 \left(-\frac{2}{T} + 1 \right) \sigma(t) - V_0 \left(-\frac{2}{T} + 1 \right) \sigma(t - T/2)$$

სრული იმპულსი იქნება

$$V(t) = V_1 + V_2 \tag{4}$$

დავალება 2: დაწერეთ ანალიზური ფორმულა როცა ეს იმპულსი მეორდება $\tau > T$ პერიოდით

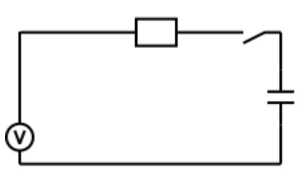
მაგალითი 5



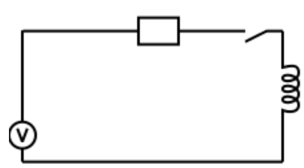
სურ 13:

დავალება 3: დაწერეთ ანალიზური ფორმულა სურ.13 მოცემული იმპულსისთვის.

$\delta(t)$ და $\sigma(t)$ ფუნქციები როგორც ჩართვის ფუნქცია



სურ 14: კონდენსატორის დამუხტვა



სურ 15: კოჭა მუდმივი დენით

განვიხილოთ სურ.14 კონდენსატორის დამუხტვის ამოცანა. ვთქვათ $t = 0$ მომენტში ირთვება $i_s = const$ დენი. მაშინ ძაბვა კონდენსატორზე იქნება:

$$V_c = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_c(\tau)d\tau \tag{5}$$

$$i_c = i_s \cdot \sigma(t)$$

$$V_c = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_s\sigma(\tau)d\tau = \frac{i_s}{C}\int_{-\infty}^{0}\sigma(\tau)d\tau + \frac{i_s}{C}\int_{0}^{t}\sigma(\tau)d\tau$$

$$V_c = \frac{i_s}{C}t\sigma(t) \tag{6}$$

რაც ნიშნავს რომ კონდენსატორზე ძაბვა იცვლება წრფივად.

განვიხილოთ სურ.15წრედი. ვთქვათ წრდეში ჩაირთო მუდმივი დენი. მაშინ კოჭაზე მოსული ძაბვა იქნება

$$V_L = L\frac{di_L}{dt} \tag{7}$$

$$i_L(t) = i_s\sigma(t)$$

$$V_L = Li_s\frac{d\sigma}{dt}$$

$$V_L = Li_s\delta(t) \tag{8}$$

δ ფუნქციის თვისებები

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t) \tag{9}$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \tag{10}$$

$$\int f(t)\delta(t-a) = f(a) \tag{11}$$

$$\delta^n(t) = \frac{\partial^n\sigma}{\partial t^n} \tag{12}$$

$$f(t)\delta'(t-a) = f(a)\delta'(t-a) - f'(a)\delta(t-a) \tag{13}$$

$$\int f(t)\delta^n(t-a)dt = (-1)^n\frac{d^n}{dt^n}f(t)\Big|_{t=a} \tag{14}$$

დავალება 4: გამოთვალეთ:

1. $3t^4\delta(t-1)$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} t\delta(t-c)dt$
3. $\int t^2\delta'(t-3)dt$
4. $\int t^2e^{-t}\delta''(t-2)dt$
5. $\int sin^2(t)\delta'(t-\pi/2)dt$