ლექცია 17: ექსპონენციალური ფურიეს მწკრივები

შესავალი

ექსპონენციალური ფურიეს მწკრივები

ნებისმიერი პერიოდული ფუნქცია $x(t)$ ფუნდამენტური პერიოდით T_0 შეიძლება გამოისახოს როგორ:

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \tag{1}$$

სადაც ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტები D_n გამოითვლება როგორც

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{2}$$

ω_0 არის ფუნდამენტური სიხშირე $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

ექსპონენციალური ფურიეს მწკრივები

კავშირი ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის და ექსპონენციალურ კოეფიციენტებს შორის:

$$D_n = \begin{cases} a_0 & n = 0; \\ \frac{1}{2}(a_n - jb_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + jb_{-n}) & n < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

ნახაზს ექსპონენცილირი ფურიე მწკრივის კოეფიციენტებით $|D_n|$ ვერტიკალურ ღერძზე და n (ან $n\omega_0$) ეწოდება მაგნიტუდის (ან ამპლიტუდის) სპექტრი. ნახაზს ექსპონენცილირი ფურიე მწკრივის ფაზებით $\angle D_n$ვერტიკალურ ღერძზე n (ან $n\omega_0$) ეწოდება ფაზის სპექტრი.

ექსპონენციალური CTFS თვისებები

სიმეტრიის თვისება: რეალური პერიოდული სიგნალისთვის, ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტები D_n და D_{-n} ერთმანეთის მიმართ კომპლექსურად შეუღლებულია.

პარსევალის თეორემა: პერიოდული $x(t)$ სიგნალის სიმძლავრე შეიძლება გამოითვალოს ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტებით როგორც:

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} |x(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |D_n|^2 \qquad (4)$$

რეალური სიგნალისათვის, $|D_n| = |D_{-n}|$, საიდანაც გამომდინარეობს მარტივი ფორმულა:

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |D_n|^2 = |D_0|^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} |D_n|^2 \qquad (5)$$

ექსპონენციალური CTFS თვისებები

წრფივობა: ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტები ორი $x_1(t)$ პერიოდული $x_2(t)$, რომლებსაც აქვთ ერთი და იგივე ფუნდამენტური პერიოდი T_0, კომბინაციისათვის მოიცემა როგორც

$$\begin{aligned} &\text{თუ } x_1(t) \longleftrightarrow D_n \text{ და } x_2(t) \longleftrightarrow E_n \text{ მაშინ} \\ &a_1x_1(t)+a_2x_2(t) \longleftrightarrow a_1D_n+a_2E_n \end{aligned} \tag{6}$$

დროში წანაცვლებაy: თუ პერიოდული სიგნალი $x(t)$ დროში წანაცვლებულია, the ამპლიტუდის სპექტრი არ იცვლება. ფაზური სპექტრი იცვლება ექსპონენციალური ფაზური წანაცვლებით. ანუ:

$$\text{თუ } x(t) \longleftrightarrow D_n \text{ მაშინ } x(t-t_0) \longleftrightarrow D_n e^{-jn\omega_0 t_0} \tag{7}$$

ექსპონენციალური CTFS თვისებები

დროში შებრუნება პერიოდული $x(t$ სიგნალის დროში შებრუნებისას ამპლიტუდის სპექტრი არ იცვლება. ფაზის სპექტრი კი განიცდის ექსპონენციალურ წანაცვლებას.

$$\text{if } x(t) \longleftrightarrow D_n \text{ then } x(-t) \longleftrightarrow D_{-n} \tag{8}$$

ზემოთ მოყვანილი ფორმულა ნიშნავს, რომ დროში შებრუნებული სიგნალის კოეფიციენტები არის საწყისი სიგნალის დროში შებრუნებული კოეფიციენტები.

დროში სკალირება თუ პერიოდული სიგნალი $x(t)$ პერიოდით T_0 დროში შკალირებულია მაშინ სპექტრი შებრუნებულად შკალირებულია.

$$\text{თუ } x(t) \longleftrightarrow D_n \text{ მაშინ } x(t/a) \longleftrightarrow D_{an} \tag{9}$$

დროში შკალირებული სიგნალის $x(t/a)$ პერიოდი მოიცემა როგორც (T_0/a).

ექსპონენციალური CTFS თვისებები

დიფერენცირება და ინტეგრება დროში გაწარმოებილი და ინტეგრებული სიგნალების ექსპონენციალური CTFS გამოითვლება საწყისი სიგნალის ექსპონენციალური კოეფიციენტების საშუალებით:

$$\text{თუ } x(t) \longleftrightarrow D_n \text{ მაშინ } \frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow jn\omega_0 D_n \text{ და } \int_{<T_0>} x(t)dt \longleftrightarrow \frac{D_n}{jn\omega_0} \tag{10}$$

ფურიე მწრივების არსებობა

$x(t)$ სიგნალის ფურეს ტრიგონომეტრიულ ან ექსპონენციალური წარმოდგენა არსებობს თუ ყველა კოეფიციენტები სასრულოა და მწკრივი კრებადია ყოველა n-თვის. ანუ მაგნიტუდის სპექტრში არ გვაქვს უსასრულობა.

CTFS წარმოდგენის არსებობისთვის პერიოდული სიგნალი $x(t)$ უნდა აკმაყოფილებდეს შემდეგ პირობებს(დირიხლეს პირობები).

(1) აბსოლიტურად ინტეგრებადი. ფართი ერთი პერიოდის ქვეშ $|x(t)|$ არის სასრულო, ანუ

$$\int_{<T_0>} |x(t)|dt < \infty$$

(2) შემოსაზღვრული ვარიაცია. პერიოდულ სიგნალს $x(t)$ აქვს სასრული რაოდენობის მინიმუმი და მაქსიმუმი ერთ პერიოდზე.

(3) წყვეტების სასრული რაოდენობა. ერთ პერიოდზე $x(t)$ აქვს წყვეტების სასრული რაოდენობა. დამატებით თითოეული წყვეტა უნდა იყოს სასრულო.

თვისებები და ფორმულები

$$\int_{<T_0>} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T_0}{2} & m = n \end{cases} \tag{11}$$

$$\int_{<T_0>} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{T_0}{2} & m = n \end{cases} \tag{12}$$

$$\int_{<T_0>} \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)dt = 0 \tag{13}$$

$$\int_{<T_0>} 1 \cdot \sin(n\omega_0 t)dt = 0 \qquad \int_{<T_0>} 1 \cdot \cos(n\omega_0 t)dt = 0 \tag{14}$$

თვისებები და ფორმულები

$$\int_{<T_0>} exp(jn\omega_0 t) \cdot (exp(jm\omega_0 t))^* dt = \begin{cases} T_0 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (15)$$

Theorem:

$$k_1 e^{j\omega_1 t} \rightarrow A_1 k_1 e^{j\omega_1 t + \phi_1} \quad (16)$$

A_1 და ϕ_1 მუდმივებია.

თვისებები და ფორმულები

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{17}$$

ანუ

$$y(t) = k_1 e^{j\omega_1 t} H(\omega_1) \tag{18}$$

$H(\omega_1)$ კომპლექსურია. მაგნიტუდის და ფაზის ენაზე გვექნება $H(\omega_1) = A_1 e^{j\phi_1}$

თვისებები და ფორმულები

$$k_1 \sin(\omega_1 t) \to A_1 k_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \tag{19}$$

და

$$k_1 \cos(\omega_1 t) \to A_1 k_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \tag{20}$$

სადაც A_1 და ϕ_1 წარმოადგენენ $H(\omega)$ ამპლიტუდას და ფაზას.

CTFS

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \quad (21)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) dt \quad (22)$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (23)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (24)$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \quad (25)$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (26)$$

მაგალითი 4.5

გამოთვალეთ სისტემის გამოძახილი სიგნალისთვის $x(t) = 2sin(5t)$ თუ LTIC სისტემის იმპულსური გამოძახილია $h(t) = 2e^{-4t}u(t)$.

ამოხსნა:

მოცემული შესავალი იმპულსისათვის გამოსავალს აქვს სახე

$$y(t) = 2A_1 sin(5t + \phi_1) \tag{27}$$

სადაც A_1 და ϕ_1 წარმოადგენენ $H(\omega_1)$-ს ამპლიტუდას და ფაზას

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = 2\int_{0}^{+\infty} e^{-4\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau = \frac{2}{4+j\omega} \tag{28}$$

მაგნიტუდა A_1 და ფაზა ϕ_1 მოიცემა როგორც

$$\begin{aligned} A_1 =& |H(\omega_1)| = \left|\frac{2}{4+j\omega}\right|_{\omega=5} = \frac{2}{41} \\ \phi_1 =& \angle H(\omega_1) = \angle \left.\frac{2}{4+j\omega}\right|_{\omega=5} = -tan^{-1}(\frac{5}{4}) = -51.34^\circ \end{aligned} \tag{29}$$

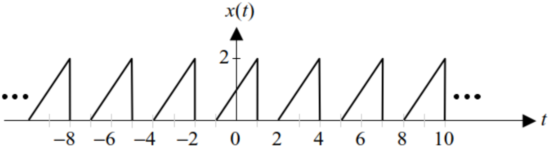
მაგალითი 4.5

მაგალით 3.4-ში გვაქვს იგივე $h(t)$ რაც ამ მაგალითში. თუ ავიღებ სისტემაში შემავალ სიგნალს იგივეს რაც ამ მაგალითშია, 3.4 ამოცანის მიდგომით მივიღებთ ზუსტად იგივე პასუხს რაც ამ მაგალითში მივიღეთ.

მაგალითი 4.6

(წიგნში გვ.153). გამოთვალეთ $x(t)$ პერიოდული სიგნალისთვის CTFS ფურიე მწკრივის კოეფიციენტები. სიგნალი განმარტებულია $T_0 = 3$ პერიოდზე როგორც:

$$x(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & 1 < t < 2 \end{cases} \tag{30}$$



სურ 1: სიგნალი $x(t)$

მაგალითი 4.6

ამოხსნა:
$x(t)$ მოცემულია სურ. 1-ზე. ვინაიდან $x(t)$ ფუნდამენტური პერიოდი $T_0 = 3$, the ფუნდამენტური სიხშირე იქნება $\omega_0 = 2\pi/3$.
გამოვიყენოთ ტრიგონომეტრიული CTFS კოეფიციენტ a_0 ფორმულა

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)dt = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} (t+1)dt = \frac{2}{3} \tag{31}$$

დანარჩენი კოეფიციენტებისთვის გვექნება

$$a_n = \frac{2}{3} \int_{-1}^{1} (t+1)\cos(n\omega_0 t) \tag{32}$$

პირველი წევრი არის ინტეგრალი კენტი ფუნქციიდან სიმეტრიულ საზღვრებში. ამიტომ ეს ინტეგრალი ნულია.

მაგალითი 4.6

$$a_n = \frac{4}{3}\int_0^1 \cos(n\omega_0 t) = \frac{4\sin(n\omega_0)}{3n\omega_0} \tag{33}$$

ჩავსვათ $\omega_0 = 2\pi/3$, და გვექნება

$$a_n = \begin{cases} 0 & n = 3k \\ \dfrac{\sqrt{3}}{n\pi} & n = 3k+1 \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{n\pi} & n = 3k+2 \end{cases} \tag{34}$$

მაგალითი 4.6

b_n კოეფიციენტებისთვის გვექნება

$$b_n = \frac{2}{3}\int\limits_{-1}^{1}(t+1)\sin(n\omega_0 t) \tag{35}$$

მეორე ინტეგრალი ნულია და

$$b_n = \frac{4}{3}\int\limits_{0}^{1} t\sin(n\omega_0 t) = -\frac{4\cos(n\omega_0)}{3n\omega_0} + \frac{4\sin(n\omega_0)}{3(n\omega_0)^2} \tag{36}$$

მაგალითი 4.6

ჩავსვათ $\omega_0 = 2\pi/3$, გვექნება

$$b_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{\pi n} & n = 3k \\ \dfrac{1}{\pi n} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2(n\pi)^2} & n = 3k+1 \\ \dfrac{1}{\pi n} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2(n\pi)^2} & n = 3k+2 \end{cases} \tag{37}$$

მაგალითი 4.6

ანუ საბოლოო პასუხი იქნება

$$x(t) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2n\pi}{3}t) + b_n \sin(\frac{2n\pi}{3}t) \qquad (38)$$

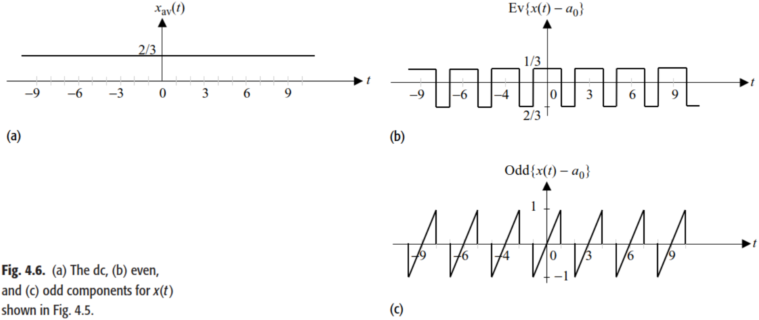


Fig. 4.6. (a) The dc, (b) even, and (c) odd components for $x(t)$ shown in Fig. 4.5.

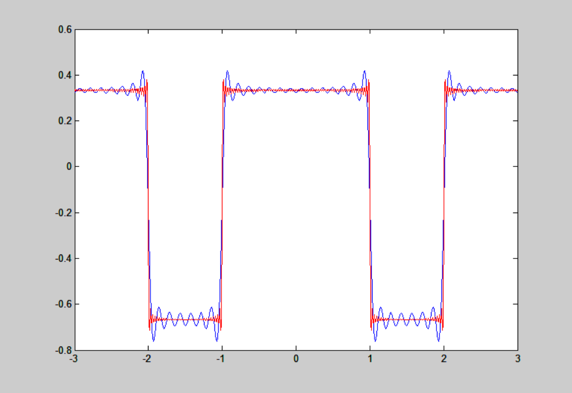
სურ 2: $x(t)$ CTFS

გაარჩიეთ მაგალითი 4.7 გვ.157

გიბსის მოვლენა

მაგალით 4.7-ში

$$w(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin(\frac{2\pi n}{3}) \cos(\frac{2\pi n}{3} t) \tag{39}$$



სურ 3: CTFS მაგალითი 4.7

გიბსის მოვლენა

```
clc;clear all;close all;
T=3;omega1=2*pi/T;  dt=0.01;t=-T:dt:T;
harmonics=20;
sum=0;
for n = 1:harmonics
 sum=sum+2/(pi*n)*sin(2*n*pi/3)*cos(2*n*pi/3*t)
end
      plot(t,sum,'b');
      hold on;
      harmonics=100;
      sum=0;
for n = 1:harmonics
sum=sum+2/(pi*n)*sin(2*n*pi/3)*cos(2*n*pi/3*t)
end
      plot(t,sum,'r');
```

გიბსის მოვლენა

გაარჩიეთ წიგნში მოყვანილი მაგალითები 4.8 & 4.9