ლექცია 18: ფურიე მწკრივების მაგალითები

Introduction

CTFS ფორმულები

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \tag{1}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) dt \tag{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \tag{4}$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \tag{5}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{6}$$

მაგალითი 4.10

გამოთვალეთ CTFS კოეფიციენტები სიგნალისთვის:

$$x(t) = 3 + \cos(4t + \frac{\pi}{4}) + \sin(10t + \frac{\pi}{4}) \tag{7}$$

$\cos(4t+\frac{\pi}{4})$ პერიოდია $T_1 = \pi/2$ და $\sin(10t+\frac{\pi}{4})$ პერიოდია $T_2 = \pi/5$. პერიოდების ფარდობა რაციონალური რიცხვია, ანუ $x(t)$ პერიოდულია ფუნდამენტური პერიოდით $T_0 = \pi$ და ფუნდამენტური სიხშირით $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2$
ვინაიდან $x(t)$ სინუსოიდალური ფუნქციების წრფივი კომბინაციაა, CTFS კოეფიციენტები უშუალოდ შეიძლება იყოს გამოთვლილი სინუს და კოსინუსის წევრების გაშლის შედეგად:

$$\begin{aligned} x(t) = 3 + \cos(4t)\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(4t)\sin(\frac{\pi}{4}) + \\ + \sin(10t)\cos(\frac{\pi}{3}) + \cos(10t)\cos(\frac{\pi}{3}) \end{aligned} \tag{8}$$

მაგალითი 4.10

ჩავსვათ სინუსის და კოსინუსის მნიშვნელობები და თუ შევადარებთ ზემოთმოყვანილ გაშლის ფორმულას მივიღებთ ($\omega_0 = 2$)

$$a_0 = 3, a_2 = 1/\sqrt{2}, a_5 = \sqrt{3}/2, b_2 = -1/\sqrt{2}, b_5 = 1/2 \qquad (9)$$

მაგალითი 4.11

გვ162. პერიოდული სიგნალი მოცემულია CTFS სახით:

$$x(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(4\pi(2m+1)t) \tag{10}$$

(i) CTFS-დან იპოვნეთ $x(t)$ სიგნალის ფუნდამენტური პერიოდი T_0.

(ii) განსაზღვრეთ $x(t)$ სიმეტრია.

(iii) დახაზეთ სიგნალი და შეამოწმეთ (i) და (ii) პასუხები.

მაგალითი 4.11

ამოხსნა:

(i) ზემოთ მოყვანილ ჯამს თუ გავშლით მივიღებთ

$$x(t) = \frac{2}{\pi}\left[sin(4\pi t) + \frac{1}{3}sin(12\pi t) + \frac{1}{5}sin(20\pi t) + \cdots\right] \quad (11)$$

როგორც ვხედავთ ფუნდამენტური სიხშირეა $\omega_0 = 4\pi$ და ფუნდამენტური კომპონენტია $\sin(4\pi t)$. პერიოდი იქნება $T_0 = 2\pi/(4\pi) = 1/2$

(ii) $x(t)$ შეიცავს მხოლოდ სინუს ფუნქციებს ანუ $x(t)$ ლუწია

(iii) გამოიყენეთ ქვემოთ მოყვანილი სკრიპტი ფუნქციის დასახაზად.

მაგალითი 4.11

```
clc;clear all;close all;
T=2;
dt=0.01;t=-T:dt:T;
harmonics=20;
sum=0;
for n = 0:harmonics
 sum=sum+1/(2*n+1)*sin(4*pi*(2*n+1)*t);
end
sum=sum*2/pi;
    plot(t,sum,'b');
```

მაგალითი 4.12

გამოთვალეთ ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტები ქვემოთ მოყვანილი სურ. 4.10 $g(t)$ სიგნალისთვის

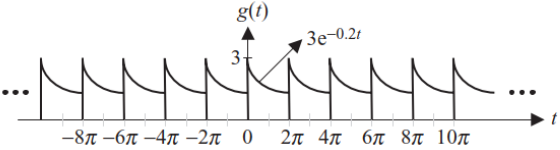


Fig. 4.10. CT periodic signal $g(t)$ with fundamental period $T_0 = 2\pi$ considered in Example 4.8.

სურ 1: $g(t)$

მაგალითი 4.12

ფუნდამენტური პერიოდია $T_0 = 2\pi$. ანუ, $\omega_0 = 2\pi/(2\pi) = 1$.

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt =$$

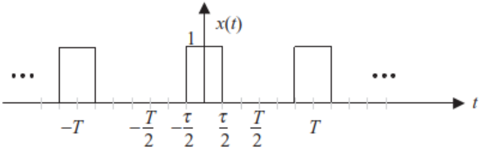
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 3e^{-0.2t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{0.2 + jn\omega_0} [1 - e^{-(0.2+jn\omega_0)2\pi}] \tag{12}$$

ჩავსვათ აქ $\omega_0 = 1$ და მივიღებთ პასუხს.
მაგალითი 4.13 მსგავსია. იხ. წიგნი გვ.164

მაგალითი 4.14

გამოთვალეთ ექსპონენციალური ფურიე მწკრივი $x(t)$ სიგნალისთვის სურ.. 4.13.

Fig. 4.13. Periodic signal $x(t)$ for Example 4.14.



სურ 2: წიგნი სურ. 4.13

ფუნდამენტური პერიოდია $T_0 = T$, შესაბამისად კუთხური სიხშირე $\omega_0 = 2\pi/T$. ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტები იქნება:

$$D_n = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{13}$$

მაგალითი 4.14

$$
\begin{aligned}
D_n =& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt = \\
=& \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1\cdot e^{-jn\omega_0 t}dt
\end{aligned} \tag{14}
$$

$$
\int e^{-jn\omega_0 t}dt = \begin{cases} -\dfrac{1}{jn\omega_0}e^{-jn\omega_0 t}+c & n\neq 0 \\ t+c & n=0 \end{cases} \tag{15}
$$

$n=0$-თვის გვექნება $D_0=\frac{\tau}{T}$.

მაგალითი 4.14

თუ $n \neq 0$

$$\begin{aligned} D_n &= -\frac{1}{jn\omega_0 T} e^{-jn\omega_0 t}\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= -\frac{1}{jn2\pi/T \cdot T}\left[\cos(-n\omega_0 t) - j\sin(-n\omega_0 t)\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} \\ &= -\frac{1}{jn2\pi} \cdot \left(-2j\sin\left(n\omega_0\frac{\tau}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{n2\pi\tau}{T2}\right) = \frac{1}{\pi n}\sin\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \\ &= \frac{\tau}{T}\frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T} \\ &= \frac{\tau}{T} sinc\left(\frac{n\tau}{T}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

თუ ავიღებთ ზღვარს $n \to 0$ მივიღებთ, რომ $\lim_{n\to 0} D_n = D_0$

მაგალითი 4.14

ამგვარად მივიღეთ, რომ მართკუთხა სიგნალის D_n კოეფიციენტები წარმოადგენენ $sinc$ ფუნქციებს

$$\boxed{D_n = \frac{\tau}{T} sinc\left(\frac{n\tau}{T}\right)} \tag{17}$$

თუ დავუკვირდებით ექსპონენციალურ CTFS,დავინახავთ რომ:

(i) ექსპონენციალური CTFS უზრუნველყოფს უფრო კომპაქტურ წარმოდგენას ტრიგონომეტრიულ CTFS-თან შედარებით. ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტები ზოგადად კომპლექსურია.

(ii) რეალური ფუნქციებისთვის D_n და D_{-n} კოეფიციენტები ურთიერთ კომპლექსურად შეუღლებულია.

LTIC სისტემის გამოძახილი პერიოდული სიგნალებისთვის

ექსპონენციალური CTFS წარმოდგენის გამოყენების მაგალითად განვიხილოთ LTIC სისტემის, იმპულსური გამოძახილით $h(t)$, გამოძახილი $y(t)$ პერიოდული $x(t)$ შესავალი სიგნალის შემთხვევაში. დავუშვათ შესავალ სიგნალის $x(t)$ ფუნდამენტური პერიოდია T_0, $x(t)$ ექსპონენციალური CTFS წარმოდგენისთვის გვაქვს:

$$x(t) = \sum_{m=0}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \tag{18}$$

ფუნდამენტური სიხშირეა $\omega_0 = 2\pi/T_0$. სისტემის გამოძახილის მისაღებად საჭიროა შემდეგი ნაბიჯები

LTIC სისტემის გამოძახილი პერიოდული სიგნალებისთვის

1. LTIC სისტემის გამოსავალი $y_n(t)$ კომპლექსური ექსპონენტისთვის $x_n(t) = D_n exp(jn\omega_0 t)$ იქნება

$$y_n(t) = D_n H(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \tag{19}$$

სადაც $H(n\omega_0) = H(\omega)$ დათვლილია $\omega = n\omega_0$.
$H(\omega)$ წარმოადგენს LTIC სისტემის გადაცემის ფუნქციას

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \tag{20}$$

LTIC სისტემის გამოძახილი პერიოდული სიგნალებისთვის

2. სუპერპოზიციის პრინციპის გამოყენებით გამოსავალი $y(t)$ მიიღება ცალკეული $y_n(t)$-ების შეკრებით. გვექნება

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n(t) \tag{21}$$

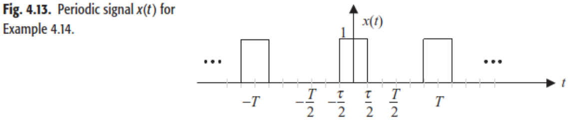
ანუ

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n H(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \tag{22}$$

3. განტ. (22) გვიჩვენებს, რომ სისტემის გამოძახილი $y(t)$ პერიოდული სიგნალისათვის $x(t)$ არის პერიოდული სიგნალი იგივე ფუნდამენტური პერიოდით რაც $x(t)$. ამას გარდა ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტები E_n გამოსავალი $y(t)$ სიგნალისა დაკავშირებულია $x(t)$ შესავალი სიგნალის D_n კოეფიციენტებთან, როგორც

$$E_n = D_n H(\omega)\big|_{\omega=n\omega_0} \tag{23}$$

მაგალითი 4.25



სურ 3: Rect სიგნალი

გამოთვალეთ ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტები გამოსავალი $y(t)$ სიგნალისათვის თუ შესავალი სიგნალი $x(t)$ არის მართკუთხა ტალღა წარმოდგენილი სურ. 4.14 და სისტემის იმპულსური გამოძახილია $h(t) = exp(-2t)u(t)$.

მაგალითი 4.25

მართკუთხა ტალღისათვის მივიღეთ CTFS კოეფიციენტები

$$\boxed{D_n = \frac{\tau}{T} sinc\left(\frac{n\tau}{T}\right)} \tag{24}$$

დავუშვათ $\tau = \pi/2$ და $T = 2\pi$ მაშინ მივიღებთ

$$D_n = \frac{1}{4} sinc\left(\frac{n}{4}\right) \tag{25}$$

სისტემის გადაცემის ფუნქცია $H(\omega)$ იქნება

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-(2+j\omega)t}dt = \frac{1}{2+j\omega} \end{aligned} \tag{26}$$

მაგალითი 4.25

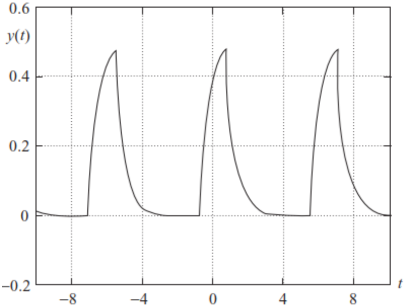
ვინაიდან $T = 2\pi$ და ფუნდამენტური სიხშირე $\omega_0 = 1$ rad/s. გვექნება

$$E_n = D_n H(\omega)|_{\omega = n\omega_0} = \frac{1}{4} sinc\left(\frac{n}{4}\right) \times \frac{1}{2 + jn} \quad (27)$$

და გამოსავალით $y(t)$ იქნება

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{sinc\left(\frac{n}{4}\right)}{8 + j4n} e^{jnt} \quad (28)$$

მაგალითი 4.25



სურ 4: $y(t)$