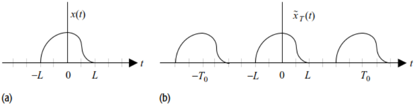
ლექცია 19: CTFT აპერიოდული სიგნალებისთვის

შესავალი

CTFT აპერიოდული სიგნალებისთვის

Fig. 5.1. Periodic extension of a time-limited aperiodic signal. (a) Aperiodic signal and (b) its periodic extension.



სურ 1: CTFT

განვიხილოთ აპერიოდული სიგნალი $x(t)$, რომლიც ნაჩვენებია სურ. 5.1(a). იმისათვის, რომ განვავრცოთ ფურიეს გარდაქმნა აპერიოდულ სიგნალებზე დავუშვათ, რომ $x(t)$ განმეორებულია რაღაც პერიოდით T_0 ისე, რომ განმეორებული სიგნალები ერთმანეთს არ ფარავენ. მიღებული სიგნალი ავღნიშნოთ როგორც $\tilde{x}_T(t)$ იხ. სურ. 5.1(b). ცხადია რომ ახალი სიგნალი $\tilde{x}_T(t)$ პერიოდულია ფუნდამენტური პერიოდით T_0 და ზღვარში

$$\lim_{T_0 \to \infty} \tilde{x}_T(t) = x(t) \tag{1}$$

CTFT აპერიოდული სიგნალებისთვის

ვინაიდან $\tilde{x}_T(t)$ პერიოდულია ფუნდამენტური სიხშირით $\omega_0 = 2\pi/T_0$ რად./წმ, მისი ექსპონენციალური CTFS წარმოდგენა იქნება:

$$\tilde{x}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{2}$$

სადაც ექსპონენციალურიl CTFS კოეფიციენტები გამოითვლება როგორც

$$\tilde{D}_n = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} \tilde{x}_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{3}$$

ავიღოთ ზღვარი $T_0 \to \infty$

$$\lim_{T_0 \to \infty} \tilde{D}_n = D_n = \lim_{T_0 \to \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{4}$$

CTFT აპერიოდული სიგნალებისთვის

Lets define

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{5}$$

მაშინ

$$D_n = \lim_{T_0\to\infty} \frac{1}{T_0} X(n\omega_0) \tag{6}$$

თუ გავიხსენებთ ექსპონენციალურ CTFS განმარტებას, მაშინ $x(t)$ შეგვიძლია გამოვთვალოთ CTFS D_n კოეფიციენტების საშუალებით, როგორც :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} = \lim_{T_0\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t} \tag{7}$$

CTFT აპერიოდული სიგნალებისთვის

ზღვარში $T_0 \to \infty$ $\omega_0 \to \Delta\omega$ და $T_0 = 2\pi/\Delta\omega$ და

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta\omega \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(n\Delta\omega) e^{jn\Delta\omega t} \Delta\omega \tag{8}$$

ვხედავთ, რომ ზღვარში მარჯვენა მხარე იქცევა ინტეგრალად.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{9}$$

(წიგნში ამ ფორმულაში (5.9) შეცდომაა)
განტოლებები(5) და (9) ქმნიან CTFT წყვილს

$$x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \tag{10}$$

CTFT აპერიოდული სიგნალებისთვის

ანუ გვაქვს

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \text{ ანალიზის განტოლება} \tag{11}$$

and

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} \text{ სინთეზის განტოლება} \tag{12}$$

CTFT აპერიოდული სიგნალებისთვის

(1) პერიოდული სიგნალი $\tilde{x}(t)$ სიხშირული წარმოდგენა მივიღეთ $\tilde{x}(t)$ სიგნალის გამოსახვით CTFS კოეფიციენტების საშუალებით. CTFS კოეფიციენტები შეიცავენ კომპლექსურ ექსპონენტებს $exp(jn\omega_0 t)$, რომლებიც განმარტებულია ფუნდამენტურ ω_0სიხშირეზე და მის ჰარმონიკებზე $n\omega_0$. აპერიოდული $x(t)$ სიგნალის სიხშირული წარმოდგენა მიღებულია CTFT გზით, სადაც კომპლექსური ექსპონენტა $exp(j\omega t)$ წარმოადგენს ბაზის ფუნქციას. ω ცვლადი CTFT ბაზის ფუნქციაში არის უწყვეტი ცვლადი და შეუძლია ჰქონდეს ნებისმიერი მნიშვნელობა $-\infty < \omega < \infty$ შუალედში. რაც ნიშნავს, რომ CTFS-საგან განსხვავებით, CTFT განმარტებულია ყველა ω სიხშირისათვის.

CTFT აპერიოდული სიგნალებისთვის

(2)ზოგადად, CTFT $X(\omega)$ კუთხური სიხშირის ω მიმართ კომპლექსური ფუნქციაა და შეიცავს სრულ ინფორმაციას სიგნალის შესახებ. სიგნალის შესახებ ინფორმაციას მივიღებთ თუ ავაგებთ $X(\omega)$-ს მაგნიტუდის და ფაზის გრაფიკს ω სიხშირის მიმართ. მაგნიტუდის $|X(\omega)|$ და ფაზის $< X(\omega)$ სურათს ω მიმართ, ეწოდებათ არაპერიოდული $x(t)$ სიგნალის მაგნიტუდის და ფაზის სპექტრი.

(3) CTFT განმარტების გამოყვანისას ჩვენ დავუშვით, რომ აპერიოდული $x(t)$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია დროში. ანუ $x(t) = 0$ რაღაც $|t| > L$-სათვის. ეს არაა აუცილებელი მოთხოვნა CTFT არსებობისათვის. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, $x(t)$ ფუნქცია შეიძლება იყოს უსასრულოდ ხანგძლივი, მაგრამ CTFT არსებობდეს.

ფურიეს გარდაქმნის წყვილები

Table 5.2. CTFT pairs for elementary CT signals

CT signals	Time domain $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	Frequency domain $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	Comments
(1) Constant	1	$2\pi\,\delta(\omega)$	
(2) Impulse function	$\delta(t)$	1	
(3) Unit step function	$u(t)$	$\pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
(4) Causal decaying exponential function	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$	$a > 0$
(5) Two-sided decaying exponential function	$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$a > 0$
(6) First-order time-rising causal decaying exponential function	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	$a > 0$
(7) Nth-order time-rising causal decaying exponential function	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$	$a > 0$
(8) Sign function	$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$	
(9) Complex exponential	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\,\delta(\omega - \omega_0)$	
(10) Periodic cosine function	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	

სურ 2: FT წყვილები

ფურიეს გარდაქმნის წყვილები

(11) Periodic sine function	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$	
(12) Causal cosine function	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	
(13) Causal sine function	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$	
(14) Causal decaying exponential cosine function	$\mathrm{e}^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a+\mathrm{j}\omega}{(a+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$	$a>0$
(15) Causal decaying exponential sine function	$\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+\mathrm{j}\omega)^2+\omega_0^2}$	$a>0$
(16) Rectangular function	$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert\le\tau/2\\0 & \lvert t\rvert>\tau/2\end{cases}$	$\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$	$\tau\neq 0$
(17) Sinc function	$\frac{W}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$	$\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert\le W\\0 & \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$	
(18) Triangular function	$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)=\begin{cases}1-\frac{\lvert t\rvert}{\tau} & \lvert t\rvert\le\tau\\0 & \text{otherwise}\end{cases}$	$\tau\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$	$\tau>0$
(19) Impulse train	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)$	$\omega_0\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-m\omega_0)$	angular frequency $\omega_0=2\pi/T_0$
(20) Gaussian function	$\mathrm{e}^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\sigma^2\omega^2/2}$	

სურ 3: FT წყვილები (გაგრძ.)