ლექცია 20: CTFT (გაგრძ.)

შესავალი

რეალური, კენტი და ლუწი ფუნქციების ფურიე გარდაქმნა

რეალური $x(t)$ სიგნალის CTFT $X(\omega)$ აკმაყოფილებს პირობას:

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \quad (1)$$

რეალური ლუწი $x(t)$ **ფუნქციის** CTFT $X(\omega)$ ასევე რეალური და ლუწია.ანუ $Re\{X(\omega)\} = Re\{X(-\omega)\}$ და $Im\{X(\omega)\} = 0$.

რეალური ლუწი $x(t)$ **ფუნქციის** CTFT $X(\omega)$ წარმოსახვითი და კენტია ანუ $Re\{X(\omega)\} = 0$ და $Im\{X(\omega)\} = -Im\{X(-\omega)\}$.

FT თვისებები

Table 5.4. Symmetry and transformation properties of the CTFT

Transformation properties	Time domain $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	Frequency domain $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	Comments
Linearity	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$	$a_1, a_2 \in C$
Scaling	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$a \in \Re$, real-valued
Time shifting	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$	$t_0 \in \Re$, real-valued
Frequency shifting	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$	$\omega_0 \in \Re$, real-valued
Time differentiation	$\frac{d^nx}{dt^n}$	$(j\omega)^nX(\omega)$	provided dx/dt exists
Time integration	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$	provided $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$ exists
Frequency differentiation	$t^nx(t)$	$(j)^n\frac{d^nX}{d\omega^n}$	provided $dX/d\omega$ exists
Duality	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$	if $x(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} X(\omega)$
Time convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$	convolution in time domain
Frequency convolution	$x_1(t) \times x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}[X_1(\omega) * X_2(\omega)]$	multiplication in time domain
Parseval's relationship	$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \lvert x(t)\rvert^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2d\omega$		energy in a signal

სურ 1: FT თვისებები

FT თვისებები

Symmetry properties			
Hermitian property	$x(t)$ is a real-valued function	CTFT: $X(-\omega) = X^*(\omega)$ real and imaginary components $\begin{cases} \mathrm{Re}\{X(\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\omega)\} \\ \mathrm{Im}\{X(\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\omega)\} \end{cases}$ magnitude and phase spectra $\begin{cases} \lvert X(-\omega)\rvert = \lvert X(\omega)\rvert \\ <X(-\omega) = -<X(\omega) \end{cases}$	real component is even; imaginary component is odd magnitude spectrum is even; phase spectrum is odd
Even function	$x(t)$ is even	$X(\omega) = 2\int\limits_0^\infty x(t)\cos(\omega t)\mathrm{d}t$	simplified CTFT expression for even signals
Odd function	$x(t)$ is odd	$X(\omega) = -\mathrm{j}2\int\limits_0^\infty x(t)\sin(\omega t)\mathrm{d}t$	simplified CTFT expression for odd signals
Real-valued and even function	$x(t)$ is even and real-valued	$\mathrm{Re}\{X(\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-\omega)\}$ $\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = 0$	CTFT is real-valued and even
Real-valued and odd function	$x(t)$ is odd and real-valued	$\mathrm{Re}\{X(\omega)\} = 0$ $\mathrm{Im}\{X(\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-\omega)\}$	CTFT is imaginary and odd

სურ 2: FT თვისებები (გაგრძ.)

CTFT არსებობის პირობა

$x(t)$ ფუნქციის CTFT $X(\omega)$ არსებობს თუ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty \tag{2}$$

ეს პირობა წარმოადგენს ფურიე გარდაქმნის არსებობის საკმარის პირობას.

პერიოდული ფუნქციის CTFT

განვიხილოთ პერიოდული $x(t)$ ფუნქცია ფუნდამენტური პერიოდით T_0. ექსპონენციალური CTFS გამოყენებით, $x(t)$- სიხშირული წარმოდგენა იქნება შემდეგი:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \tag{3}$$

სადაც $\omega_0 = 2\pi/T_0$ ფუნდამენტური სიხშირეა და D_n აღნიშნავს CTFS-ს ექსპონენციალურ კოეფიციენტებს D_n, რემელიც გამოითვლება, როგორც

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t) e^{-jn\omega_0 t} \tag{4}$$

პერიოდული ფუნქციის CTFT

ახლა ავიღოთ CTFT მე-(3) განტოლებიდან

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}\right\} \tag{5}$$

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \mathcal{F}\left\{e^{jn\omega_0 t}\right\} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(\omega - n\omega_0) \tag{6}$$

ანუ, $x(t)$ პერიოდული სიგნალის CTFT გამოითვლება როგორც

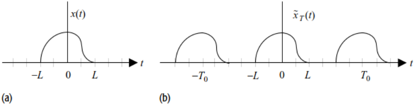
$$x(t) \xleftrightarrow{\text{CTFT}} 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} D_n \delta(\omega - n\omega_0) \tag{7}$$

CTFS კოეფიციენტები როგორც CTFT დისკრეტული სიმრავლე(sampl

(CTFS coefficients as samples of CTFT) ზემოთ ვნახეთ მეთოდი, თუ როგორ გამოვითვალოთ პერიოდული სიგნალის CTFT მისი CTFS წარმოდგენის საშუალებით. ახლა ვანახოთ თუ როგორ გამოვთვალოთ CTFS კოეფიციენტები მისი CTFT წარმოდგენიდან.

განვიხილოთ დროში შემოსაზღვრული აპერიოდული სუნქცია $x(t)$, რომლის CTFT $X(\omega)$ ცნობილია. მივყვეთ პროცედურას რაც წარმოდგენილი იყოს წიგნის 5.1 პარაგრაფში, რაც ნიშნავს რომ, ვაგებთ $x(t)$ სიგნალის გამეორებებს, რომელბიც თანაბრადაა დაშორებული რაღაც T_0 ხანგძლივობით.

Fig. 5.1. Periodic extension of a time-limited aperiodic signal. (a) Aperiodic signal and (b) its periodic extension.



სურ 3: CTFT

CTFS კოეფიციენტები როგორც CTFT-ს დისკრეტიზაცია

პროცესი ნაჩვენებია სურ. 5.1-ე, სადაც $x(t)$ აპერიოდული სიგნალია, რომელიც მოცემულია სურ.3 (a)-ზე. მისი პერიოდული განზოგადება $\tilde{x}_T(t)$ მოცემულია სურ. 3(b)-ზე. თუ გამოვიყენებთ განტოლებას(8) , პერიოდული სიგნალის ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტები გამოითვლება როგორც

$$\tilde{D}_n = \frac{1}{T_0} \int\limits_{<T_0>} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \tag{8}$$

$$\tilde{D}_n = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} X(\omega) \mid_{\omega = n\omega_0} \tag{9}$$

რაც წარმოადგენს კავშირს აპერიოდული $x(t)$ სიგნალის CTFT-ს და მის პერიოდული განზოგადების $\tilde{x}_T(t)$-ს CTFS კოეფიციენტებს შორის.

CTFS კოეფიციენტები როგორც CTFT-ს დისკრეტიზაცია

ანუ, ჩვენ შეგვიძლია გამოვთვალოთ T_0 პერიოდის მქონე პერიოდული სიგნალის ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტები CTFT წარმოდგენიდან შემდეგი ნაბიჯების გამოყენებით.
(1) გამოვთვალოთ $x(t)$ აპერიოდული სიგნალის CTFT $X(\omega)$, რომელსაც მივიღებთ პერიოდული $\tilde{x}_T(t)$ სიგნალიდან როგორც

$$x(t) = \begin{cases} \tilde{x}_T(t) & -T_0/2 \leq t \leq T_0/2 \\ 0 & \text{სხვაგან} \end{cases} \tag{10}$$

(2) პერიოდული სიგნალია $\tilde{x}_T(t)$-ს ექსპონენციალური CTFS კოეფიციენტები D_n გამოითვლება როგორც

$$D_n = \frac{1}{T_0} X(\omega) \,|_{\omega = n\omega_0} \tag{11}$$

სადაც ω_0 აღნიშნავს $\tilde{x}_T(t)$ პერიოდული სიგნალის ფუნდამენტურ სიხშირეს $\omega_0 = 2\pi/T_0$.

ფურიეს გარდაქმნის წყვილები

Table 5.2. CTFT pairs for elementary CT signals

CT signals	Time domain $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$	Frequency domain $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$	Comments
(1) Constant	1	$2\pi\delta(\omega)$	
(2) Impulse function	$\delta(t)$	1	
(3) Unit step function	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$	
(4) Causal decaying exponential function	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a + j\omega}$	$a > 0$
(5) Two-sided decaying exponential function	$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$	$a > 0$
(6) First-order time-rising causal decaying exponential function	$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	$a > 0$
(7) Nth-order time-rising causal decaying exponential function	$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(a + j\omega)^{n+1}}$	$a > 0$
(8) Sign function	$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{2}{j\omega}$	
(9) Complex exponential	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	
(10) Periodic cosine function	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	

სურ 4: FT წყვილები

ფურიეს გარდაქმნის წყვილები

(11) Periodic sine function	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$	
(12) Causal cosine function	$\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2}[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	
(13) Causal sine function	$\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\pi}{2j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$	
(14) Causal decaying exponential cosine function	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	$a>0$
(15) Causal decaying exponential sine function	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)u(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	$a>0$
(16) Rectangular function	$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)=\begin{cases}1 & \lvert t\rvert\le\tau/2\\0 & \lvert t\rvert>\tau/2\end{cases}$	$\tau\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$	$\tau\ne 0$
(17) Sinc function	$\frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\frac{Wt}{\pi}\right)$	$\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)=\begin{cases}1 & \lvert\omega\rvert\le W\\0 & \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$	
(18) Triangular function	$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)=\begin{cases}1-\frac{\lvert t\rvert}{\tau} & \lvert t\rvert\le\tau\\0 & \text{otherwise}\end{cases}$	$\tau\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)$	$\tau>0$
(19) Impulse train	$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)$	$\omega_0\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-m\omega_0)$	angular frequency $\omega_0=2\pi/T_0$
(20) Gaussian function	$e^{-t^2/2\sigma^2}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$	

სურ 5: FT წყვილები (გაგრძ.)

მაგალითი 5.1

გამოთვალეთ CTFT და დახაზეთ მაგნიტუდის და ფაზის სპექტრი ქვემოთ მოყვანილი სიგნალებისთვის:

(i) $x_1(t) = exp(-at)u(t)$, $a \in R^+$;

(ii) $x_2(t) = exp(-a|t|)$, $a \in R^+$;

ამოხსნა:

(i) FT განმარტების თანახმად გვაქვს

$$X_1(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$= \int\limits_{0}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt = -\frac{1}{a+j\omega}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_0^{\infty} \qquad (12)$$
$$= -\frac{1}{a+j\omega}\left[\lim_{t\to\infty} e^{-(a+j\omega)t} - 1\right]$$

მაგალითი 5.1

პირველი წევრი სადაც გვჭირდება ზღვარი ნულია (იხ. წიგნი გვ. 197). ანუ

$$X_1(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

ამპლიტუდის და ფაზის სპექტრები მოცემულია წიგნში სურ.5.3-ზე.

მაგალითი 5.1

(ii) FT განმარტების თანახმად გვაქვს

$$
\begin{aligned}
X_2(\omega) = \mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \sin(\omega t) dt
\end{aligned}
\tag{13}
$$

მეორე ინტეგრალი აღებულია კენტი სიგნალიდან სიმეტრიულ საზღვრებში, ამიტომ ნულია. პირველი ინტეგრალი აღებულია ლუწი ფუნქციიდან ამიტომ გვექნება

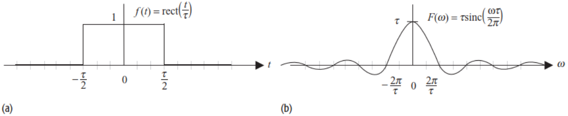
მაგალითი 5.1

$$
\begin{aligned}
X_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cos(\omega t) dt \\
&= 2 \int_{0}^{\infty} e^{-at} \cos(\omega t) dt \\
&= \frac{2}{a^2+\omega^2} \left[-ae^{-at} \cos(\omega t) + \omega e^{-at} \sin(\omega t) \right]_0^{\infty} \\
&= \frac{2a}{a^2+\omega^2}
\end{aligned} \tag{14}
$$

ამპლიტუდის და ფაზის სპექტრი მოცემულია სურ. 5.4-ზე
მაგალითები 5.2-5.5 იხ. წიგნში გვ.198

მაგალითი 5.6

გამოთვალეთ CTFT მართკუთხა ფუნქციისათვის $f(t)$ სურ.6(5.7(a) წიგნში.)



სურ 6: $rect\left(\frac{t}{\tau}\right)$ და მისი FT

მაგალითი 5.6

$$
\begin{aligned}
F(\omega) = \mathcal{F}\{rect(t/\tau)\} &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt \\
&= \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega}\right]_{-\tau/2}^{\tau/2} \\
&= -\frac{1}{j\omega}\left[e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}\right] \\
&= -\frac{1}{j\omega}\left[-2jsin\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)\right] \\
&= \frac{2}{\omega}\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = \tau sinc\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right)
\end{aligned} \tag{15}
$$

მაგალითი 5.7 ამ მაგალითის დუალურია. იხ. წიგნი გვ.202

შებრუნებული ფურიე გარდაქმნა

შებრუნებული ფურიე გარდაქმნა შეიძლება გამოთვლილ იქნას რამდენიმე გზით: ა) პირდაპირი გამოთვლები (სინთეზის განტოლება); ბ) ცხრილების გამოყენებით; c) წილად ნაწილებად გაშლით.

მაგალითი 5.9

ცხრილის გამოყენებით გამოთვალეთ შებრუნებული CTFT შემდეგი ფუნქციებისთვის:

$$X(\omega) = \frac{2(j\omega) + 24}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 25} \tag{16}$$

მაგალითი 5.9

ამოხსნა:

ზემოთ მოყვანილი წილადის გაშლის ერთერთი გზა არის შემდეგი

$$X(\omega) = 2\frac{2+(j\omega)}{((j\omega)+2)^2+5^2} + 4\frac{5}{((j\omega)+2)^2+5^2} \tag{17}$$

გამოვიყენოთ ცხრილის სურ.5. ვხედავთ რომ

$$e^{-2t}\cos(5t)u(t) \xleftrightarrow{CTFT} \frac{2+j\omega}{((j\omega)+2)^2+5^2} \tag{18}$$

$$e^{-2t}\sin(5t)u(t) \xleftrightarrow{CTFT} \frac{5}{((j\omega)+2)^2+5^2} \tag{19}$$

ამგვარად შებრუნებული CTFT გამოითვლება როგორც:

$$x(t) = 2e^{-2t}\cos(5t)u(t) + 4e^{-2t}\sin(5t)u(t) \tag{20}$$

წილად ნაწილებად გაშლა

ცხრილის გამოყენება შეიძლება მარტივი CTFT-სათვის. უფრო რთული შემთხვევებისთვის საჭიროა $X(\omega)$ გაშლა მარტივ ფუნქციებად, რომელთა შებრუნებული CTFT მოცემულია ცხრილში 5.2.

გავარჩიოთ შემთხვევა (iii), რომელიც იყენებს წილად ნაწილებად გაშლას.

წილად ნაწილებად გაშლა

განვიხილოთ CTFT

$$X(\omega) = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \cdots + b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \cdots + a_1(j\omega) + a_0} \tag{21}$$

წილად ნაწილებად გაშლა დეტალურად მოცემულია წიგნის დანართ D-ში. ძირითადი ნაბიჯები არის შემდეგი:
(1) ვაქციოთ $D(\omega)$ n ცალ ნამრავლად და გამოვსახოთ $X(\omega)$ როგორც:

$$X(\omega) = \frac{N(\omega)}{(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\cdots(j\omega - p_n)} \tag{22}$$

წილად ნაწილებად გაშლა

(2) თუ $D(\omega)$-ში არ გვაქვს გამეორებადი კომპლექსური ფესვები, $X(\omega)$ გამოისახება n წილადი ნაწილებით როგორც:

$$X(\omega) = \frac{k_1}{(j\omega - p_1)} + \frac{k_2}{(j\omega - p_2)} + \cdots + \frac{k_n}{(j\omega - p_n)} \tag{23}$$

სადაც წილადების კოეფიციენტები გამოითვლება ჰევისაიდის ფორმულით როგორც:

$$k_r = \left[(j\omega - p_r)X(\omega)\right]_{j\omega = p_r} \tag{24}$$

სადაც $1 \leq r \leq n$. გამეორებადი ან კომპლექსური ფესვების შემთხვევაში ფორმულა რთულდება და ეს შემთხვევები გარჩეულია დანართ D-ში.

(3) შებრუნებული CTFT შეიძლება გამოთვლილ იქნას როგორც:

$$x(t) = \left[k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \cdots + k_n e^{p_n t}\right] u(t) \tag{25}$$

მაგალითი 5.10

წილად ნაწილებად გაშლის მეთოდით გამოთვალეთ შებრუნებული CTFT შემდეგი ფუნქციისთვის:

$$X(\omega) = \frac{5(j\omega) + 30}{(j\omega)^3 + 17(j\omega)^2 + 80(j\omega) + 100} \tag{26}$$

ამოხსნა:

დავუშვათ $j\omega$ არის ცვლადი $D(\omega)$-ს ფესვისათვის: $j\omega = -2, -5$, და -10. $X(\omega)$ წილად ნაწილებად გაშლის მეთოდი გვაძლევს

$$\begin{aligned} X(\omega) =& \frac{5(j\omega) + 30}{(j\omega)^3 + 17(j\omega)^2 + 80(j\omega) + 100} \equiv \\ \equiv& \frac{k_1}{j\omega + 2} + \frac{k_2}{j\omega + 5} + \frac{k_3}{j\omega + 10} \end{aligned} \tag{27}$$

მაგალითი 5.10

ნაწილების კოეფიციენტები გამოითვლება როგორც

$$\begin{aligned} k_1 &= (j\omega+2)\frac{5(j\omega)+30}{(j\omega+2)(j\omega+5)(j\omega+10)}\bigg|_{j\omega=-2} \\ &= \frac{5(j\omega)+30}{(j\omega+5)(j\omega+10)}\bigg|_{j\omega=-2} = \frac{5}{6} \end{aligned} \tag{28}$$

ზუსტად იგივე გზით მივიღებთ $k_2 = -\frac{1}{3}$ და $k_3 = -\frac{1}{2}$(იხ. გვ.211). ანუ

$$X(\omega) = \frac{5}{6(j\omega+2)} - \frac{1}{3(j\omega+5)} - \frac{1}{2(j\omega+10)} \tag{29}$$

ახლა შეგვიძლია გამოვიყენოთ ცხრილი და გვექნება

$$x(t) = \left[\frac{5}{6}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-5t} - \frac{1}{2}e^{-10t}\right]u(t) \tag{30}$$