Signals and Linear Systems
სიგნალები და წრფივი სისტემები
100pts total
(15pt midterm)

Problem set 1(20pt)

Calculate and plot the zero-state response of an LTI system to $x(t) = u(t-3) - u(t)$ if the impulse response of the system is $h(t) = (1 - |t-1|)[u(t) - u(t-2)]$. You must use the graphical method.
გამოთვალეთ ნულოვანი მდგომარეობის გამოძახილი LTI სისტემისა სიგნალისათვის $x(t) = u(t-3) - u(t)$ თუ სისტემის იმპულსური გამოძახილი მოიცემა როგორც $h(t) = (1 - |t-1|)[u(t) - u(t-2)]$. გამოიყენეთ გრაფიკული მეთოდი.

Problem set 2(20pt)

Calculate the trigonometric CTFS coefficients for the following functions:
გამოთვალეთ ტრიგონომეტრიული ფურიე მწკრივის CTFS კოეფიციენტები სიგნალისათვის

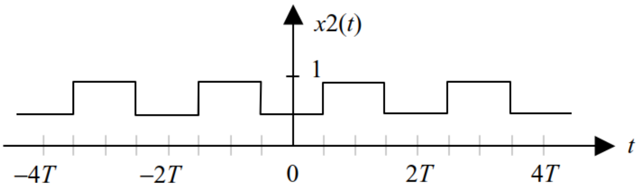
$$x(t) = cos7t + sin(15t + \pi/2);$$

Problem set 3(30pt)

Consider the following periodic functions represented as CTFS:
განვიხილოთ პერიოდული სიგნალი რომელიც მოიცემა ფურიეს მწკრივით:

$$x(t) = \frac{7}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sin[8\pi(2m+1)t]$$

(i) CTFS-დან იპოვნეთ $x(t)$ სიგნალის ფუნდამენტური პერიოდი T_0.
(ii) განსაზღვრეთ $x(t)$ სიმეტრია.



სურ 1:

Problem set 4(30pt)

Raised square wave with period 2T :
აწეული კვადრატული ტალღა სურ.1 პერიოდით 2T მოიცემა როგორც

$$x(t) = \begin{cases} 0.5 & -T/2 \leq t < T/2 \\ 1 & T/2 \leq t < 3T/2 \end{cases}$$

გამოთვალეთ ექსპონენციალური ფურიე მწკრივის კოეფიციენტები.

მითითება: მარტივი გზა იქნება, გამოიყენოთ სიგნალის სიმეტრია და გამოთვალოთ ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტები. შემდეგ გამოიყენოთ კავშირი ტრიგონომეტრიული მწკრივის კოეფიციენტებსა და ექსპონენციალური მწკრივის კოეფიციენტებს შორის.

$$D_n = \begin{cases} a_0 & n = 0; \\ \frac{1}{2}\left(a_n - jb_n\right) & n > 0 \\ \frac{1}{2}\left(a_{-n} + jb_{-n}\right) & n < 0 \end{cases} \tag{1}$$

CTFS ფორმულები

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \tag{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)dt \tag{3}$$

$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt \tag{4}$$

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)\sin(n\omega_0 t)dt \tag{5}$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n e^{jn\omega_0 t} \tag{6}$$

$$D_n = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt \tag{7}$$

$$e^{\pm jt} = \cos t \pm j \sin t$$

$$\cos t = \frac{1}{2}[e^{jt} + e^{-jt}]$$

$$\sin t = \frac{1}{2j}[e^{jt} - e^{-jt}]$$

$$\cos\left(t \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin t$$

$$\sin\left(t \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos t$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)$$

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$$

$$\cos^3 t = \frac{1}{4}(3 \cos t + \cos 3t)$$

$$\sin^3 t = \frac{1}{4}(3 \sin t - \sin 3t)$$

$$\cos(t \pm \theta) = \cos t \cos\theta \mp \sin t \sin\theta$$

$$\sin(t \pm \theta) = \sin t \cos\theta \pm \cos t \sin\theta$$

$$\tan(t \pm \theta) = \frac{\tan t \pm \tan\theta}{1 \mp \tan t \tan\theta}$$

$$\sin t \sin\theta = \frac{1}{2}[\cos(t - \theta) - \cos(t + \theta)]$$

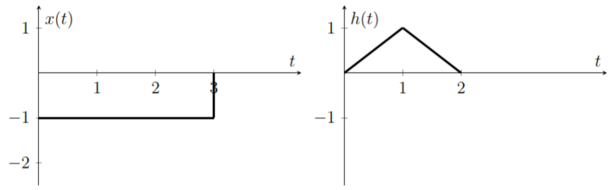
$$\cos t \cos\theta = \frac{1}{2}[\cos(t + \theta) + \cos(t - \theta)]$$

სურ 2:

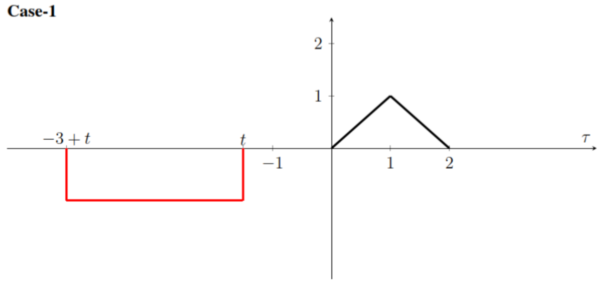
amocana 1

3

Calculate and plot the zero-state response of an LTI system to $x(t) = u(t-3) - u(t)$ if the impulse response of the system is $h(t) = (1-|t-1|)[u(t) - u(t-2)]$. **You must use the graphical method.**



Case-1

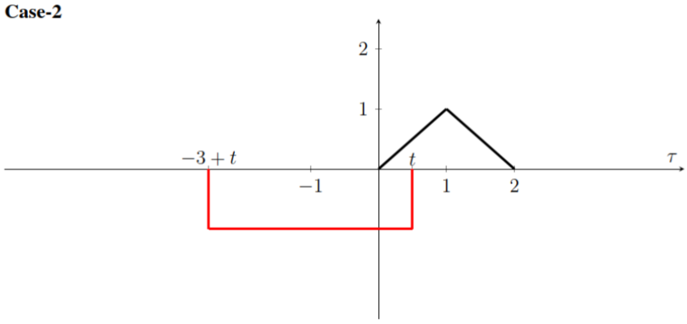


სურ 3:

$t \leq 0$

$y(t) = 0$

Case-2

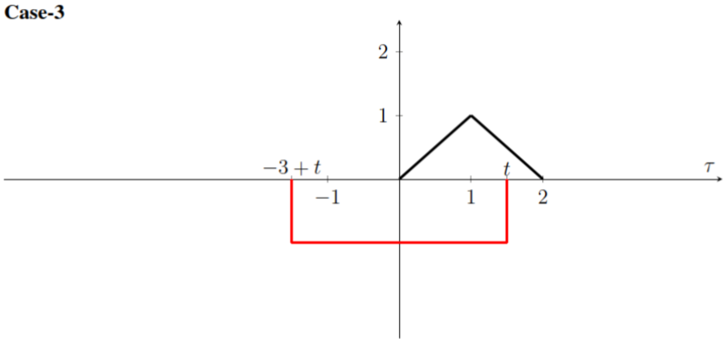


სურ 4:

$0 \le t \le 1$

$$y(t) = \int_0^t -\tau d\tau = -\frac{\tau^2}{2}\bigg|_0^t = -\frac{t^2}{2}.$$

Case-3

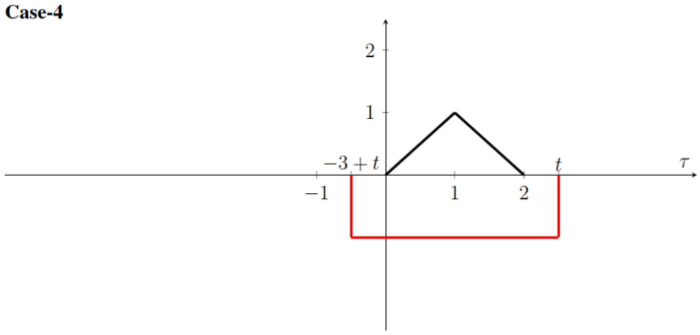


$1 \le t \le 2$

$$y(t) = \int_0^1 -\tau d\tau + \int_1^t -(2-\tau)d\tau = -\frac{1}{2} + \frac{(2-\tau)^2}{2}\bigg|_1^t = -1 + \frac{(2-t)^2}{2}$$
$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 1$$

ნურ 5:

Case-4

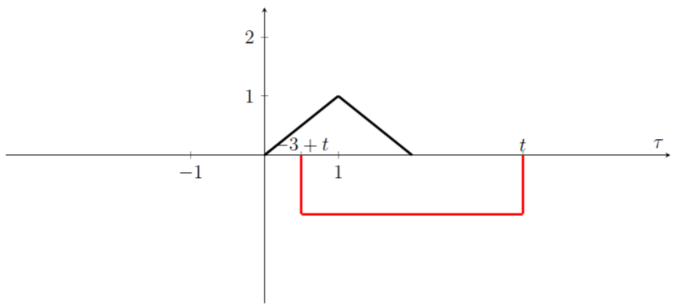


$t \ge 2,\ -3+t \le 0 \longrightarrow 2 \le t \le 3$

$$y(t) = \int_0^1 -\tau d\tau + \int_1^2 -(2-\tau)d\tau = -1$$

ნურ 6:

Case-5

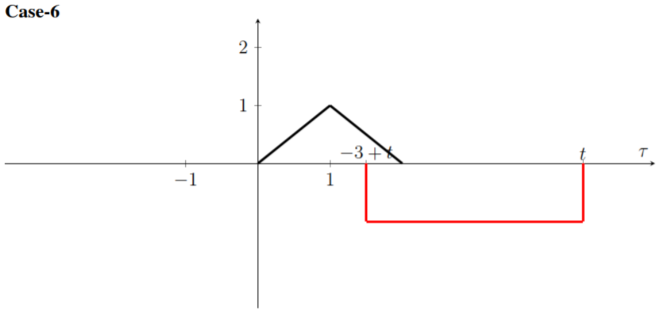


$$0 \le -3+t \le 1 \longrightarrow 3 \le t \le 4$$

$$y(t) = \int_{-3+t}^{1} -\tau d\tau + \int_{1}^{2} -(2-\tau)d\tau = -\frac{\tau^2}{2}\bigg|_{-3+t}^{1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{(t-3)^2}{2} - \frac{1}{2}$$
$$= -1 + \frac{(t-3)^2}{2} = \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{7}{2}$$

ნუნ 7:

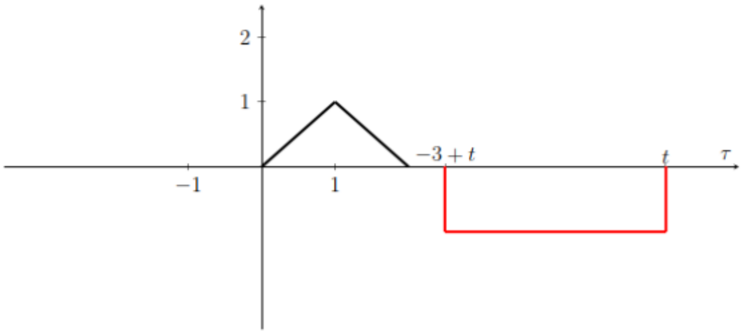
Case-6



$$1 \le -3+t \le 2 \longrightarrow 4 \le t \le 5$$
$$y(t) = \int_{-3+t}^{2} -(2-\tau)d\tau = -\frac{(2-\tau)^2}{2}\bigg|_{-3+t}^{2} = -\frac{(5-t)^2}{2}$$

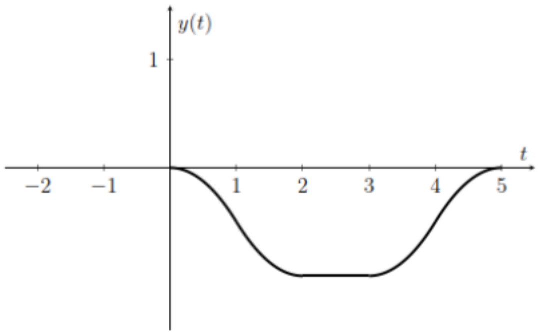
ნუნ 8:

Case-7



$$-3+t \geq 2 \longrightarrow t \geq 5$$
$$y(t) = 0$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ -\frac{t^2}{2} & 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{t^2}{2} - 2t + 1 & 1 \leq t \leq 2 \\ -1 & 2 \leq t \leq 3 \\ \frac{t^2}{2} - 3t + \frac{7}{2} & 3 \leq t \leq 4 \\ -\frac{(5-t)^2}{2} & 4 \leq t \leq 5 \\ 0 & t \geq 5 \end{cases}$$



სურ 9:

amocana4 ამოხსნა

(b) By inspection, we note that the time period $T_0 = 2T$, which implies that the fundamental frequency $\omega_0 = \pi/T$. Since $x(t)$ is an even function, therefore, the DTFS coefficients D_n's are given by

$$D_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} x(t)\cos(n\omega_0 t)dt = \begin{cases} \frac{1}{T}\int_0^{0.5T} 0.5dt + \frac{1}{T}\int_{0.5T}^{T} dt = 0.25 + 0.5 = 0.75 & n = 0 \\ \frac{1}{T}\int_0^{0.5T} 0.5\cos(n\omega_0 t)dt + \frac{1}{T}\int_{0.5T}^{T}\cos(n\omega_0 t)dt, & n \neq 0. \end{cases}$$

For $(n \neq 0)$, the DTFS coefficients are given by

$$\text{or, } D_n = \frac{0.5}{T}\left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_0^{0.5T} + \frac{1}{T}\left[\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right]_{0.5T}^{T} = \frac{0.5}{n\pi}[\sin(0.5n\pi) - 2\sin(0.5n\pi)] = -\frac{0.5}{n\pi}\sin(0.5n\pi).$$

Combining the above results, we get

$$D_n = \begin{cases} \frac{3}{4} & n = 0 \\ 0 & \text{even } n, n \neq 0. \\ -\frac{1}{2|n|\pi} & \text{odd } n, n = (4k+1) \\ \frac{1}{2|n|\pi} & \text{odd } n, n = (4k+3). \end{cases}$$

4.11.

B

The magnitude and phase spectra are given by

Magnitude Spectrum: $$|D_n| = \begin{cases} \frac{3}{4}, & n = 0 \\ 0, & \text{even } n, n \neq 0. \\ \frac{1}{2|n|\pi}, & \text{odd } n. \end{cases}$$

Phase Spectrum: $$\prec D_n = \begin{cases} 0, & \text{even } n \\ \pi, & \text{odd } n, n = (4k+1) \\ 0, & \text{odd } n, n = (4k+3). \end{cases}$$

სურ 10: