წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა MATLAB-ში

არსებობს წრფივ განტოლებათა ამოხსნის მრავალი მეთოდი, მაგრამ თითქმის ყველა მათგანი მოითხოვს მრავალი გამოთვლითი ოპერაციის განხორციელებას, რომელთა შესრულებისას ადვილად შეიძლება დავუშვათ შეცდომა, ამიტომ მათ ამოსახსნელად ძალზე მოხერხებულია კომპიუტერის გამოყენება.

ვთქვათ მოცემულია n უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემა:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$
$$..$$
$$a_{n1}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n$$

საზოგადოდ უცნობთა რიცხვი n არ უდრის განტოლებათა m რიცხვს. თუ m=n, მაშინ სისტემას კვადრატული ეწოდება.

სისტემას ეწოდება თავსებადი, თუ მას გააჩნია ერთი მაინც ამონახსნი, სხვა შემთხვევაში ის არათავსებადია.

მატრიცების ენაზე ეს სისტემა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$A * X = B.$$

ვთქვათ მოცემულია კვადრატული სისტემა, მაშინ A მატრიცაც კვადრატულია და როგორც ვიცით მატლაბში მისი დეტერმინანტი გამოითვლება $\det(A)$ ფუნქციით.

კრამერის წესის თანახმად n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა თავსებადია და აქვს ერთადერთი ამონახსნი, თუ სისტემის დეტერმინანტი განსხვავდება ნულისგან და ეს ამონახსნი გამოითვლება შემდეგი ფორმულებით:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad j = 1,2,...,n$$

სადაც Δ_j არის დამხმარე დეტერმინანტი, ანუ A მატრიცის დეტერმინანტი, რომლის j-ურ სვეტში ჩაწერილია თავისუფალი წევრების B სვეტი.

კრონეკერ-კაპელას თეორემის თანახმად n უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემის თავსებადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია, რომ სისტემის მატრიცის რანგი უდრიდეს მისი გაფართოებული მატრიცის რანგს. (შეგახსენებთ, რომ გაფართოებული მატრიცა მიიღება A მატრიცისაგან თავისუფალი წევრების სვეტის მიწერით). თანაც თუ სისტემის რანგი უდრის უცნობთა n რაოდენობას, მაშინ განტოლებას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, ანუ სისტემა განსაზღვრულია, ხოლო თუ სისტემის რანგი ნაკლებია n-ზე მაშინ სისტემას აქვს უსასრულოდ ბევრი ამონახსნი, ანუ განუსაზღვრელია. (მატლაბში A მატრიცის რანგი გამოითვლება შემდეგი ფუნქციით rank(A) გაფართოებული ფუნქციის რანგი კი შეიძლება ასე გამოვთვალოთ rank([A B])).

არსებობს წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის მრავალი ზუსტი და მიახლოებითი მეთოდი. მიახლოებითი მეთოდები საჭიროა როცა სისტემაში ძალიან ბევრი უცნობი და განტოლებაა ან მაშინ როცა სისტემის დეტერმინანტი ახლოსაა ნულთან. ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ რამოდენიმე ზუსტ მეთოდს.

როგორც უკვე აღვნიშნეთ n უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემა მატრიცების ენაზე შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად:

$$A * x = B \qquad (1)$$

სადაც x და B სვეტ ვექტორებია, ან

$$x * A = B \qquad (2)$$

სადაც x და B სტრიქონ ვექტორებია.

თუ მოცემული გვაქვს n უცნობიან n წრფივ განტოლებათა კვადრატული სისტემა, მაშინ (1) და (2) განტოლების ორივე მხარის გამრავლება შეგვიძლია სისტემის A მატრიცის შებრუნებულზე A^{-1}-ზე (მატლაბში მატრიცის შერუნებულის გამოთვლა შეიძლება $inv(A)$ მეშვეობითაც), მივიღებთ:

$$A^{-1} * A * x = A^{-1} * B$$
$$E * x = A^{-1} * B$$
$$x = A^{-1} * B \qquad (1')$$

და

$$x * A * A^{-1} = B * A^{-1}$$
$$x * E = B * A^{-1}$$
$$x = B * A^{-1} \qquad (2')$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა.

(1') და (2') ფორმულები მატლაბში შეიძლება ჩაიწეროს \ მარცხენა და / მარჯვენა გაყოფის ოპერატორების მეშვეობითაც:

$$x = A \backslash B \qquad (1'')$$

და

$$x = B / A \qquad (2'').$$

სისტემის მატრიცის შებრუნებულზე გამრავლებით შეიძლება ამოიხსნას მხოლოდ წრფივ განტოლებათა კვადრატული სისტემები, რადგან $A^{-1} = inv(A)$ განისაზღვრება მხოლოდ კვადრატული მატრიცებისთვის. თუ მატრიცის დეტერმინანტი $\det(A)$ ნულის ტოლია ან ძლიერ მცირე სიდიდეა მატლაბში ამ მეთოდით მიღებული ამონახსნი შეიძლება არ აღმოჩნდეს სწორი, ამიტომ ყოველთვის რეკომენდირებულია შემოწმების ჩატარება x ამონახსნის A მატრიცაზე გამრავლებით უნდა მივიღოთ B, ან $A * x - B$ უნდა იყოს ნულოვანი ვექტორი.

მატრიცის შებრუნებულზე გამრავლების მეთოდისგან განსხვავებით / და \ ოპერატორების გამოყენება შეიძლება ყველანაირი ზომის წრფივ განტოლებათა სისტემისთვის. კვადრატული მატრიცის შემთხვევაში ორივე მეთოდი ერთნაირ შედეგს იძლევა ოღონდ გამოანგარიშება ხდება სხვადასხვანაირად. კვადრატული მატრიცებისთვის / და \ გამოიანგარიშება გაუსის გამორიცხვის ალგორითმით, არაკვადრატულისთვის კი უმცირეს კვადრატთა მეთოდით. საზოგადოდ / და \ ოპერატორების გამოყენება უფრო მიზანშეწონილია ვიდრე შებრუნებული მატრიცის მეთოდის, რადგან ერთნაირი გამოთვლის სიზუსტის პირობებში / და \ ოპერაცია უფრო ჩქარა სრულდება.

მაგალითისთვის განვიხილოთ განტოლებათა სამუცნობიანი სისტემა:

$$\begin{bmatrix} 3x_1 - 1x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + 2\,x_2 - x_3 = -1 \end{bmatrix}$$

ეს სისტემა მატრიცულად ასე ჩაიწერება: AX=B , სადაც

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = [10 \quad 5 \quad -1]^T.$$

შეგვიძლია სისტემა მატრიცულად სხვა ფორმითაც ჩავწეროთ: XA=B, სადაც:

$$X = [x_1 \quad x_2 \quad x_3] \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad B = [10 \quad 5 \quad -1].$$

ამოვხსნათ განტოლებათა ზემოთხსენებული სისტემა:

```
»A = [3,2,-1; -1,3,2; 1,-1,-1];
»B = [10,5,-1]';
»X = A\B;
X=[-2; 5; -6]
```

ვექტორი X შეიცავს სიდიდეებს: -2, 5, -6. შეგვიძლია შევამოწმოთ ამოხსნა, გავამრავლოთ A*X. შედეგად მივიღებთ სვეტ ვექტორს ელემენტებით: 10,5,-1. x შეიძლება ასეც გამოგვეთვალა:

X = inv(A)*B.

თუ გატოლებათა სისტემის დეტერმინანტი ნულის ტოლია ან ძლიერ მცირე სიდიდეა (ნულთან ახლო) MATLAB მიგვითითებს შეცდომაზე და ამ დროს ამონახსნი ვექტორი შეიძლება შეიცავდეს მნიშვნელობებს – NAN , +∝, -∝ an შესაძლებელია MATLAB-მა გამოითვლის ამოხსნა, მაგრამ მიგვითითოს, რომ შედეგი მაინცდამაინც სანდო არ არის.

n უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემას ეწოდება ერთგვაროვანი თუ მისი ყველა თავისუფალი წევრი ნულის ტოლია: $B_j = 0$, $j = 1,2,...,n$. თუ ერთგვაროვანი სისტემის რანგი ნაკლებია n უცნობთა რაოდენობაზე, მას ექნება უამრავი ამონახსნი MATLAB კი მოგვცემს მხოლოდ მის ტრივიალურ ამოხსნას $x_j = 0$, $j = 1,2,...,n$.

n უცნობიან m წრფივ განტოლებათა სისტემის $A * x = B$ ამოხსნა MATLAB-ში შეიძლება linsolve(A,B) ფუნქციის მეშვეობითაც.

სავარჯიშო

ამოხსენით წრფივ განტოლებათა სისტემა მატრიცების გაყოფისა და მატრიცების შებრუნებულის მეთოდით. MATLAB საშუალებით შეამოწმე მიღებული ამონახსნი მატრიცების გამრავლების საშუალებით.

1. $\begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 = -3 \\ -2x_1 + x_2 = 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 = -3 \\ -6x_1 + 3x_2 = -9 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -2x_1 + x_2 = -3 \\ -2x_1 + x_2 = -3.00001 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 10x_1 - 7x_2 + 0x_3 = 7 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 4 \\ 5x_1 + x_2 + 5x_3 = 6 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_3 - 2x_4 = 16 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 10x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -15 \end{bmatrix}$

\	მატრიცების მარცხენა გაყოფა
/	მატრიცების მარჯვენა გაყოფა
inv(x)	x მატრიცის შებრუნებულის გამოთვლა
rank(x)	x მატრიცის რანგის გამოთვლა
linsolve(A,B)	$A * x = B$ წრფივ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

მოქმედებები მრავალწევრებზე

ნებისმიერი ალგებრული განტოლება x ცვლადის მიმართ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი მრავალწევრის (პოლინომის) სახით:

$$a_1 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n = 0 .$$

Matlab-ში მრავალწევრები მოიცემა მათი კოეფიციენტების მეშვეობით. მაგალითად $5x^2 - 7x + 14$ ჩაიწერება ასე p=[5 -7 14].

განვიხილოთ Matlab-ის ფუნქციები მრავალწევრებთან სამუშაოდ:

conv(p1,p2)	p1 კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის გადამრავლება p2 კოეფიციენტებიან მრავალწევრზე
[Q,R]=deconv(p1,p2)	p1 კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის გაყოფა p2 კოეფიციენტებიან მრავალწევრზე. Q არის გაყოფის შედეგად მიღებული მრავალწევრი, R კი ნაშთი. p1 = conv(p2,Q) + R.

განვიხილოთ რამდენიმე მაგალითი:

```
»p1=[2 0 1];
»p2=[1 0 0 1];
»p=conv(p1,p2)
p=[2 0 1 -2 0 -1]

»deconv(p,p2)
ans=[2 0 1]

»[Q,R]=deconv(p,[1 0 -2])
Q = 2    0    5    -2
R = 0    0    0    0    10    -5
»conv(Q,[1 0 -2])+R
ans=2    0    1    -2    0    -1
```

polyval(p1,x) გამოითვლის p1 კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის მნიშვნელობას x წერტილში

```
»p1=[2 1 0 -1 0 -3]
»y=polyval(p1,0)
y=-3
```

roots(p) გამოითვლის p კოეფიციენტებიანი მრავალწევრის ფესვებს

```
»p=[1 0 -1];
»x=roots(p)
x=1
-1
```

poly(x) გამოითვლის x ფესვებიანი მრავალწევრის კოეფიციენტებს

```
» p = [2,8,31,80,94,20];
» r = roots(p)
r =
  -0.1059 + 3.1661i
  -0.1059 - 3.1661i
  -1.7602 + 0.7881i
  -1.7602 - 0.7881i
  -0.2679
» p1 = poly(r)
p1 = 1.0000   4.0000   15.5000   40.0000   47.0000   10.0000
```

მიაქციეთ ყურადღება, რომ უფროსი ხარისხის კოეფიციენტი ფესვებიდან აღდგენილ მრავლწევრში ყოველთვის ერთის ტოლია.