კუთხით გასროლილი სხეულის მოძრაობა 1

ვთქვათ სხეული გასროლილია კუთხით და საწყისი სიჩქარით. თუ ჩავთლით რომ ჰაერთან ხახუნი არ გვაქვს და გრავიტაციული მუდმივა უცვლელია (ანუ სხეულის სიჩქარე მცირეა და დიდად არ სცილდება ჰორიზონტს) მაშინ სხეულის მოძრაობა აღიწერება ფორმულით:

$$a_x = 0 \tag{1}$$

$$a_y = -g \tag{2}$$

$$v_x = v_0 \cos\theta_0 \tag{3}$$

$$v_y = v_0 \sin\theta_0 - gt \tag{4}$$

$$x = x_0 + v_0 \cos\theta_0 t \tag{5}$$

$$y = y_0 + v_0 \sin\theta_0 t - gt^2/2 \tag{6}$$

სიმარტივისთვის დავუშვათ $x_0 = 0$ და $y_0 = 0$.

სხეული აღწევს მაქსიმალურ სიმაღლეს. ამ მომენტში $v_y = 0$ შესაბამისად დრო რომლის განმავლობაშიც მოხდება მაქსიმალურ სიმაღლის მიღწევა ტოლია

$$t_{\text{მაქს}} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} \tag{7}$$

შესაბამისად ფრენის დრო (დაცემის მომენტი)

$$t_{\text{სრ}} = 2 \cdot t_{\text{მაქს}} \tag{8}$$

თუ გამოვსახავთ დროს t (5) დან და ჩავსვამთ (6)ში მივიღებთ(დავუშვათ $x_0 = y_0 = 0$):

$$y = xtg\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta_0} \tag{9}$$

ფრენის მანძილი იქნება

$$l = v_x \cdot t_{\text{სრ}} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

ფრენის მაქსიმალური სიმაღლე იქნება

$$h = v_0 \sin\theta_0 \cdot t_{\text{მაქს}} - g \cdot t_{\text{მაქს}}^2/2 = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g}$$

როგორც ვხედავთ ამოცანა ამოიხსნა ანალიზურად ანუ დროის ნებისმიერ მომენტში შეგვიძლია ვიპოვნოთ სხულის მდებარეობა და განვსაზღვროთ მოძრაობის ტრაექტორია.

თუ გავითვალისწინებთ ხახუნს და სიჩქარე იქნება ახლოს კოსმოსურ სიჩქარესთან მაშინ ამოცანა ანალიზურად არ იხსნება და საჭიროა ე.წ. რიცხვითი მეთოდები. ამ ამოცანას შემდგომში განვიხილავთ.

ანალიზური ამოხსნა

რადგან ამცანა იხსნება ანალიზურად ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ (9) ტრაექტორიის დასახატად. ასევე რადგან ვიცით ფრენის სრული დრო (8) ჩვენ შეგვიძლია დრო ვცვალოთ პატარა Δt ბიჯით და გამოვიყენოთ (3)-(6) ფორმულები..

ამოხსნა: ეილერის მეთოდი

ზოგად შემთხვევაში (მაგ. როცა გვაქვს ხახუნი) ამოცანა არ იხსნება ანალიზურად და საჭიროა რიცხვითი მეთოდები. ჩავწეროთ (1)-(6) სასრული სხვაობების მეთოდით (ე.წ. ეილერის მეთოდი):

$$v_x^{n+1} = v_x^n \quad \text{ანუ არ იცვლება} \tag{10}$$
$$v_y^{n+1} = v_y^n + a_y \cdot \Delta t \tag{11}$$
$$x^{n+1} = x^n + v_x^n \cdot \Delta t \tag{12}$$
$$y^{n+1} = y^n + v_y^n \cdot \Delta t \tag{13}$$

სადაც n აღნიშნავს ახალ დროით მომენტს; $a_y = -g$.

Δt უნდა ავიღოთ მცირე, რომ ცდომილება არ გამოვიდეს დიდი. რადგან ვიცით ფრენის სრული დრო შეგვიძლია შემოვიტანოთ პროცესის დამთავრების კრიტერიუმად დრო t და პროცესი შევწყვიტოთ როცა $t > t_{სრ}$.

სხვა კრიტერიუმად შეგვიძლია მიწაზე დაცემის პირობა ანუ $y \leq 0$. თუ Δt მცირეა მაშინ $y < 0$ იქნება მცირე. თუმცა შეგვიძლია უფრო დიდი სიზუსტით ვიპოვნოთ დროის ის მომენტი როცა მოხდა დაცემა ანუ $y = 0$. ამას მოგვიანებით ვნახავთ. ეს კრიტერიუმი გამოდგება იმ შემთხვევაშიც როცა არ ვიცით ფრენის სრული დრო ანუ არ ვიცით წინასწარ რამდენი ბიჯი (n) არის საჭირო პროცესის მოდელირებისათვის.

ამოცანა:

1. დავხაზოთ სხეულის მოძრაობის ტრაექტორია(3)-(6) და (9) ფორმულების გამოყენებით
2. დავხაზოთ სხეულის მოძრაობის ტრაექტორიები ერთი და იგივე ნახაზზე (3-6) და (9) ფორმულების გამოყენებით კუთხე იცვლება $[10^\circ, \cdots, 70^\circ]$ 5° ბიჯით
3. დავხაზოთ როგორ იცვლება კუთხე სხეულის მოძრაობის ტრაექტორიაზე *მითითება*: $tg\theta = v_y/v_x$
4. გავაკეთოთ იგივე ეილერის მეთოდის (10)-(13) გამოყენებით

.

"დავხაზოთ" ნაცვლად გამოთვალეთ (X,Y) კოორდინატები და ჩავწეროთ ფაილებში ანალიზური ამოცხსნისთვის და ეილერის მეთოდისთვის.

ასევე გამოვთვალოთ მოცემულ წერტილში კუთხე და ჩვწეროთ ფაილში