

ელექტროდინამიკა

(ლექციათა კონსპექტი)

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
ელექტრული და ელექტრონული ინჟინერიის დეპარტამენტი

2018,2026

თავი 1	მანათლული აღრიგვის ელემენტები	3
§1	ეკლიდის სივრცე	3
§2	მრუდწირული კოორდინატები	5
§3	კოვარიანტული კოორდინატები. ლამეს პარამეტრები	7
§4	ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა	9
§5	სფერული საკოორდინატო სისტემა	11
§6	სკალარული ველის გრადიენტი	13
§6.1	მაგალითი: რადიუს ვექტორის მოდულის გრადიენტი	13
§6.2	მაგალითი: რადიუს ვექტორის კვადრატის გრადიენტი.	14
§7	ვექტორული ველის დივერგენცია	14
§7.1	მაგალითი: რადიუს ვექტორის დივერგენცია	15
§7.2	მაგალითი: რადიუს ვექტორის და სკალარული ფუნქციის ნამ- რავლის დივერგენცია	15
§7.3	მაგალითი: რადიუს ვექტორის ნაკადი სფერულ ზედაპირში	16
§8	ვექტორული ველის როტორი	16
თავი 2	ელემენტარული ფორმები	18
§9	კულონის კანონი	20
§10	ელექტრული ველი	20
§10.1	წერტილოვანი მუხტების სიმკვრივე და დელტა ფუნქცია.	21
§10.2	მაგალითი: დამუხტული ძაფის მიერ შექმნილი ველი	22
§10.3	მაგალითი: დამუხტული რგოლის ველი	23
§10.4	მაგალითი: დამუხტული სიბრტყის ველი	24
§11	გაუსის კანონი	24
§12	გაუსის კანონის დიფერენციალური ფორმა	26
§13	ველის როტორი და სკალარული პოტენციალი	26
§14	პუასონის და ლაპლასის განტოლებები	27
§15	ლაპლასიანი და დელტა ფუნქცია	28
§16	ელექტრული ველის ენერგია	29
§17	გამტარი ელექტროსტატიკურ ველში	32
§17.1	სასაზღვრო პირობები	32
§17.2	გამტარის ზედაპირზე მოქმედი ძალა	34
§17.3	გამტარები ელექტრულ ველში	35

§18 პოტენციალი და გრინის ფუნქცია	36
§18.1 გრინის თეორემა	37
§18.2 გრინის თეორემის გამოყენება	38
§18.3 გრინის თეორემა და სასაზღვრო პირობები	39
§18.4 ამონახსნის ერთადერთობა და სასაზღვრო პირობები	39
§18.5 გრინის ფუნქცია და სასაზღვრო პირობები	40
§18.6 გრინის თეორემა და ნეიმანის სასაზღვრო პირობა.	42
თავი 3 ელემენტარული ამოცანების ამოხსნის მეთოდები	44
§19 გამოსახულების მეთოდი	44
§20 მაგალითი: წერტილოვანი მუხტი და უსასრულო დამიწებული სიბრტყე	45
§21 ამოცანა: წერტილოვანი მუხტი რამდენიმე გამტარ სიბრტყეს შორის .	47
§22 მაგალითი: წერტილოვანი მუხტი დამიწებული გამტარი სფეროს შიგნით	47
თავი 4 ელემენტარული ველის განტოლებები	53
§23 მაქსველის განტოლებები	53
§23.1 მაქსველის დიფერენციალური განტოლებები	53
§23.2 მაქსველის დიფერენციალური განტოლებები მრუდწირულ კო- ორდინატებში	55
§23.3 მაქსველის ინტეგრალური განტოლებები	57
§24 მაგნიტური დენები და მუხტები	57
§25 უწყვეტობის განტოლებები	58
§26 ტალღური განტოლებები	58
§27 სასაზღვრო პირობები	59
§28 უმოვ-პოინტინგის თეორემა	62
დანართი	65
ჩ კო- და კონტრავარიანტული მდგენელები	66
ჩ.1 ბაზისი და მეტრიკული ტენზორი	67
ჩ.1.1 კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტების გან- მარტება	68
ჩ.1.2 მეტრიკული ტენზორი და ინდექსების აწევა-დაწევა	68
ჩ.1.3 კომპონენტთა გარდაქმნის კანონები	69
ჩ.1.4 ფიზიკური კომპონენტები (x^{*i} და x_i^*)	70
ჩ.2 კო- და კონტრავარიანტული კოორდინატები, გეგმილები და ფიზიკუ- რი მდგენელები მახვილკუთხა და დუალურ სისტემებში	72
ჩ.3 პაულის შენიშვნა და ორთოგონალური გეგმილები	75
ჩ.3.1 პაულის შენიშვნის გეომეტრიული შინაარსი	75
ჩ.3.2 კორენევის წიგნიდან პირველი აგება (მართობი e_1 -ზე)	76

ჩ.3.3	კორნევის წიგნიდან მეორე აგება (e_2 -ის პარალელური წრფის გაგრძელება დუალურ ღერძზე)	79
ჩ.4	ვექტორის ფიზიკური კოორდინატები და მათ შორის კავშირები	81
ჩ.4.1	კავშირი ფიზიკურ კოვარიანტულ (x_i^*) და კოვარიანტულ (x_i) კომპონენტებს შორის	82
ჩ.4.2	კავშირი ფიზიკურ კონტრავარიანტულ (x^{*i}) და კონტრავარიანტულ (x^i) კომპონენტებს შორის	82
ჩ.4.3	კავშირი ფიზიკურ კოვარიანტულ (x_i^*) და კონტრავარიანტულ (x^i) კომპონენტებს შორის	83
ჩ.4.4	კავშირი ფიზიკურ კონტრავარიანტულ (x^{*i}) და კოვარიანტულ (x_i) კომპონენტებს შორის	83
ჩ.4.5	კავშირი ფიზიკურ კოვარიანტულ (x_i^*) და ფიზიკურ კონტრავარიანტულ (x^{*j}) კოორდინატებს შორის	84
ჩ.4.6	კოვარიანტულ კოორდინატებსა და ორთოგონალურ გეგმილს შორის კავშირი	84
ჩ.4.7	კონტრავარიანტულ კოორდინატებსა და დუალურ ღერძზე გეგმილს შორის კავშირი	85
ჩ.4.8	ხუთივე კოორდინატული და გეომეტრიული სიდიდის ($x_i, x^i, x_i^* \equiv P_i, x^{*i}, P^i$) ექსპერიმენტული ინტერპრეტაცია	86
ჩ.5	გაზომადობა არაორთოგონალურ საკოორდინატო სისტემაში	89
ჩ.5.1	ფიზიკური კოვარიანტული კომპონენტი (ორთოგონალური გეგმილი)	89
ჩ.5.2	ფიზიკური კონტრავარიანტული კომპონენტი (პარალელური მდგენელი)	90
ჩ.5.3	მათემატიკური დამოკიდებულება და გადახრის სიდიდე	90
ჩ.6	მეტრიკა ირიბკუთხა კოორდინატებში. ურთიერთშეუღლებული სისტემები და ფუნდამენტური ობიექტი	91
ჩ.6.1	ირიბკუთხა კოორდინატთა სისტემა და წერტილის მდებარეობის დაფიქსირება	91
ჩ.6.2	გარდაქმნის მატრიცა β_k^i და მეტრიკული ტენზორი g_{ik}	92
ჩ.6.3	კავშირი ფიზიკურ მონაკვეთებსა (Z^i) და კონტრავარიანტულ კოორდინატებს (z^i) შორის	93
ჩ.6.4	კოვარიანტული კომპონენტების z_i გეომეტრიული გამოყვანა	94
ჩ.6.5	ვექტორის ოთხი წარმოდგენა	95
ჩ.6.6	ურთიერთშეუღლებული (დუალური) კოორდინატთა სისტემა	97
ჩ.6.7	შეუღლებული სისტემის მათემატიკური გამოყვანა მატრიცული მეთოდით	98
ჩ.6.8	ორთოგონალური ბაზისების კერძო შემთხვევა	99

ჟ	ელექტროდინამიკური ერთეულების სისტემები: SI, გაუსი (CGS) და ჰევისაიდ-ლორენცი	101
ჟ.1	მაქსველის განტოლებები სხვადასხვა სისტემაში	102
ჟ.2	ფორმულების გადაყვანის წესები (სიმბოლური ჩანაცვლება)	103
ჟ.2.1	SI ფორმულის გადაყვანა გაუსის (CGS) სისტემაში	103
ჟ.3	სიდიდეებისა და ერთეულების შედარებითი ცხრილი	104
ჟ.4	ძირითადი რიცხვითი გადაყვანის წესები	105
ჟ.5	გაუსიდან (CGS) SI სისტემაში გადაყვანის წესი	107
ჟ.6	პირდაპირი გადაყვანა გაუსიდან (CGS) ჰევისაიდ-ლორენცის (HL) სისტემაში	107
ჟ.6.1	ძირითადი წესი ($CGS \rightarrow HL$)	107
ჟ.6.2	პირდაპირი გადაყვანის ცხრილი	108
ჟ.6.3	მაგალითები	108
ჟ.7	ზოგადი განტოლებები კოეფიციენტებით	108
ჟ.7.1	უნივერსალური განტოლებები	109
ჟ.7.2	კოეფიციენტების ცხრილი	109
ჟ.8	პუასონის განტოლება და გრინის ფუნქცია სხვადასხვა სისტემაში	109
ჟ.8.1	პუასონის განტოლება ელექტროსტატიკაში	109
ჟ.8.2	გრინის განტოლება და გრინის ფუნქცია	110
ჟ.8.3	პოტენციალის გამოსახვა გრინის ფუნქციით	110

დავალებები

დავალება 1.1	4
დავალება 1.2	5
დავალება 1.3	10
დავალება 1.4	13
დავალება 1.5	13
დავალება 1.6	14
დავალება 1.7	17
დავალება 4.1 ტალღური განტოლებები	58

შესავალი

განხილულია ელექტროდინამიკის ძირითადი ამოცანები. აქცენტი გაკეთებულია პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნაზე. ეს დოკუმენტი წარმოადგენს ლექციების ნაწილს პლიუს მეთოდური მითითებები და დავალებები. შესაბამის ადგილებში მითითებულია წიგნი/პარაგრაფი რაც მოეთხოვება სტუდენტს. ეს დოკუმენტი არაა წიგნის შემცველი. ამ დოკუმენტის მიზანია:

- გააადვილოს წიგნთან მუშაობა.
- ტიპური ამოცანების ამოხსნა.

კურსში ასევე განხილული იქნება ამოცანები დ.ჯეკსონის წიგნიდან.

ქვეყნები

ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები

§1	ევკლიდის სივრცე	3
§2	მრუდწირული კოორდინატები	5
§3	კოვარიანტული კოორდინატები. ლამეს პარამეტრები	7
§4	ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა	9
§5	სფერული საკოორდინატო სისტემა	11
§6	სკალარული ველის გრადიენტი	13
§6.1	მაგალითი: რადიუს ვექტორის მოდულის გრადიენტი	13
§6.2	მაგალითი: რადიუს ვექტორის კვადრატის გრადიენტი.	14
§7	ვექტორული ველის დივერგენცია	14
§7.1	მაგალითი: რადიუს ვექტორის დივერგენცია	15
§7.2	მაგალითი: რადიუს ვექტორის და სკალარული ფუნქციის ნამრავ- ლის დივერგენცია	15
§7.3	მაგალითი: რადიუს ვექტორის ნაკადი სფერულ ზედაპირში	16
§8	ვექტორული ველის როტორი	16

ქ ყ რ რ განხილულია ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები. დაწვრილებით იხილეთ გ. ჭილაშვილი ტენზორული აღრიცხვის ელემენტები. აა ⑤ Ⓐ

§1 ევკლიდის სივრცე.

რადიუს ვექტორი განისაზღვრება ფორმულით

$$\mathbf{r} = x \cdot \mathbf{e}_x + y \cdot \mathbf{e}_y + z \cdot \mathbf{e}_z \quad (1.1)$$

სადაც x, y, z რადიუს ვექტორის კოორდინატებია, ხოლო

$$\mathbf{e}_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

საბაზისო ორტები. მოსახერხებელია შემდეგი ჩაწერა x, y, z ნაცვლად შემოვიტანოთ x_i სადაც ინდექსი i იღებს მნიშვნელობებს 1, 2, 3. მაშინ

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \cdot \mathbf{e}_i \quad (1.3)$$

ხოლო რადიუს ვექტორის სიგრძის კვადრეტი იქნება

$$\mathbf{r}^2 = \left(\sum_{i=1}^3 x_i \cdot \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 x_j \cdot \mathbf{e}_j \right) \quad (1.4)$$

მიაქციეთ ყურადღება რომ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებები ცალ-ცალკე არის სწორედ რადიუს ვექტორის ზემოთ მოყვანილი გაშლა, მაგრამ ამ ორ ჯამში ჯამის აღსანიშნავად გამოყენებულია **სხვადასხვა ინდექსი**. ეს თავიდან აგვაცილებს ჯამების გახსნისას და გადამრავლებისას ე.წ. შერეული წევრების „დაკარგვას“. ასეთ ინდექსებს (ინდექსებს რომლის მიხედვითაც ზდება აჯამება) უწოდებენ „მუნჯი“ ინდექსებს. მუნჯი ინდექსი შეიძლება აღნიშნული იყოს ნებისმიერი ასო-ნიშნით ეს შედეგზე არ მოქმედებს. მუნჯი ინდექსი უნდა მეორედობდეს მხოლოდ ერთხელ^①. რადგან მუნჯი ინდექსები აჯამების ინდექსებია, ხშირად ჯამის ნიშანს არ წერენ და იგულისხმება ჯამი განმეორებული ანუ მუნჯი ინდექსებით [chilashvili] (ეინშტეინის შეთანხმება) ზემოთქმულის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j x_i x_j \quad (1.5)$$

სადაც $i, j = \overline{1, 3}$ (იღებს მნიშვნელობებს 1, 2, 3) ჯამში პირველი ნამრავლი წარმოადგენს საკოორდინატო სისტემის ორტების სკალარულ ნამრავლს. ვიცით რა რომ ევკლიდის სივრცეში $\mathbb{E}^3$ დეკარტეს საკოორდინატო სისტემისათვის ორტები ორთოგონალურია (აღებული გვაქვს ერთეულოვანი ორტები) გვექნება $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

დავალბა №1.1

შეამოწმეთ $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$

^① განსაკუთრებული შემთხვევები სპეციალურად იქნება აღნიშნული.

სადაც δ_{ij} უწოდებენ კრონეკერის სიმბოლოს. ამ შემთხვევაში ესაა 3×3 ერთეულოვანი მატრიცა $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ამის გათვალისწინებით გვექნება

$$\mathbf{r}^2 = \delta_{ij}x_i x_j \quad (1.6)$$

δ_{ij} გააჩნია ე.წ. ინდექსის ფილტრაციის თვისება

დავალეზა №1.2

$$\text{შეამოწმეთ } a_i = \delta_{ij}a_j$$

$a_i = \delta_{ij}a_j$ ანუ კრონეკერის სიმბოლოზე გამრავლება ერთი ინდექსის აჯამვით მუნიხ ინდექსს ცვლის კრონეკერის სიმბოლოს მეორე, თავისუფალი ინდექსით^② ამ თვისების გათვალისწინებით თუ დავუბრუნდებით რადიუს ვექტორის ფორმულას მივიღებთ

$$\mathbf{r}^2 = x_i x_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (1.7)$$

ცნობილი ფორმულა სკოლის სახელმძღვანელოდან .

§2 მრუდწირული კოორდინატები

წერტილის მდებარეობა სივრცეში განისაზღვრება რადიუს ვექტორით - $\mathbf{r}$, რომლის კოორდინატები (q_1, q_2, q_3) დამოკიდებულია საკოორდინატო სისტემის რაობაზე. წერტილის მდებარეობა განისაზღვრება ცალსახად როგორც $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$ ზედაპირების გადაკვეთის წერტილი. ორი ზედაპირის გადაკვეთა კი იძლევა საკოორდინატო წირებს. ამ წირებზე იცვლება ერთი კოორდინატი ზოლო დანარჩენი ორი უცვლელია. ამ საკოორდინატო წერტილებს ეწოდებათ მრუდწირული. სისტემას ეწოდება მრუდწირული ორთოგონალური თუ კოორდინატის წერტილში გავლებული მხებები ურთიერთ ორთოგონალურია. ამ მხებებს საკოორდინატო ღერძები ეწოდება. მათი მიმართულება იცვლება წერტილიდან წერტილში. $\mathbf{e}_{q1}, \mathbf{e}_{q2}, \mathbf{e}_{q3}$ - სამგანზომილებიანი საკოორდინატო სისტემის საბაზისო ვექტორებია. ნებისმიერი ორთოგონალური სისტემისათვის ადგილი აქვს ტოლობებს (მარჯვენა საკოორდინატო სისტემა)

$$\mathbf{e}_{q1} \times \mathbf{e}_{q2} = \mathbf{e}_{q3}, \mathbf{e}_{q2} \times \mathbf{e}_{q3} = \mathbf{e}_{q1}, \mathbf{e}_{q3} \times \mathbf{e}_{q1} = \mathbf{e}_{q2}$$

^②შეგახსენებთ, რომ განმეორებითი ანუ მუნიხ ინდექსით იგულისხმება ჯამი.

ხოლო ნებისმიერი ვექტორი იშლება ამ საბაზისო ვექტორების საშუალებით

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_{q1}A_{q1} + \mathbf{e}_{q2}A_{q2} + \mathbf{e}_{q3}A_{q3} \quad (1.8)$$

ვექტორის მოდული:

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_{q1}^2 + A_{q2}^2 + A_{q3}^2} = \sqrt{A_i^2} \quad (1.9)$$

ორი ვექტორის სკალარული ნამრავლი:^③

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{e}_{q1}A_{q1} + \mathbf{e}_{q2}A_{q2} + \mathbf{e}_{q3}A_{q3}) \cdot \\ &\quad \cdot (\mathbf{e}_{q1}B_{q1} + \mathbf{e}_{q2}B_{q2} + \mathbf{e}_{q3}B_{q3}) \\ &= A_{q1}B_{q1} + A_{q2}B_{q2} + A_{q3}B_{q3} \\ &= A_iB_i \end{aligned} \quad (1.10)$$

ორი ვექტორის ვექტორული ნამრავლი:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{q1} & \mathbf{e}_{q2} & \mathbf{e}_{q3} \\ A_{q1} & A_{q2} & A_{q3} \\ B_{q1} & B_{q2} & B_{q3} \end{vmatrix} = \mathbf{e}_{q1}(A_{q2}B_{q3} - A_{q3}B_{q2}) + \\ &\quad + \mathbf{e}_{q2}(A_{q3}B_{q1} - A_{q1}B_{q3}) + \\ &\quad + \mathbf{e}_{q3}(A_{q1}B_{q2} - A_{q2}B_{q1}) + \\ &= \varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_iA_jB_k \end{aligned} \quad (1.11)$$

სამი ვექტორის შერეული ნამრავლი:

$$\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \begin{vmatrix} C_{q1} & C_{q2} & C_{q3} \\ A_{q1} & A_{q2} & A_{q3} \\ B_{q1} & B_{q2} & B_{q3} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}C_iA_jB_k \quad (1.12)$$

ε_{ijk} ლევი-ჩივიტას სიმბოლოს უწოდებენ. ესაა ანტისიმეტრიული ერთეულოვანი ტენზორი. $\varepsilon_{123} = 1$, ხოლო ინდექსის ყოველი შემდგომი გადანაცვლებისას 1 იცვლება -1 -ით. ε_{ijk} ტოლია 0 ნებისმიერი ორი ინდექსის ტოლობის შემთხვევაში.

წირითი ზედაპირული და მოცულობითი ინტეგრალების გამოთვლისას საჭიროა სივრცის ელემენტის ცოდნა. მრუდწირულ q_i კოორდინატებისთვის dl_i სივრცის ელემენტს საკოორდინატო წირის გასწვრივ აქვს სახე: $dl_i = h_idq_i$ ($i = 1, 2, 3$), h_i დამოკიდებულია საკოორდინატო სისტემაზე და მათ ლამეს პარამეტრები ეწოდება

^③აქ გამოყენებულ იქნა საბაზისო ვექტორების ორთონორმირების პირობა.

④ ვექტორის დიფერენციალი:

$$d\vec{l} = \mathbf{e}_{q1}dl_1 + \mathbf{e}_{q2}dl_2 + \mathbf{e}_{q3}dl_3 \quad (1.13)$$

ან რაც იგივეა

$$d\vec{l} = \mathbf{e}_{q1}(h_1dq_1) + \mathbf{e}_{q2}(h_2dq_2) + \mathbf{e}_{q3}(h_3dq_3) \quad (1.14)$$

მოცულობის ელემენტი:

$$dV = h_1h_2h_3dq_1dq_2dq_3 \quad (1.15)$$

ორთოგონალური სისტემის მაგალითია დეკარტის მართკუთხა საკოორდინატო სისტემა. მრუდწირული ორთოგონალური სისტემის მაგალითებია სფერული, ცილინდრული და ელიფსური საკოორდინატო სისტემები.

§3 კოვარიანტული კოორდინატები. ლამეს პარამეტრები

ვთქვათ გვაქვს ორი საკოორდინატო სისტემა დეკარტის კოორდინატებით და მართკუთხა მრუდწირული კოორდინატებით და გვაქვს გადასვლის $x_i(q_1, q_2, q_3)$ და შებრუნებული გადასვლის $q_i(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციები. დავუშვათ რომ ეს გადასვლა ცალსახაა. დეკარტეს კოორდინატებში რადიუს ვექტორი ჩაიწერება როგორც:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$$

ანალოგიურად მრუდწირული კოორდინატებისათვის საჭიროა საბაზისო ვექტორების შემოტანა. ეს შეიძლება მოხდეს რამდენიმე გზით.

საბაზისო ვექტორებად შეიძლება აღებულ იქნას მხეხები მოცემულ წერტილში.

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^\alpha}$$

ცხადია არაა აუცილებელი, რომ $\mathbf{g}_\alpha$ იყოს ერთეულოვანი

$$|\mathbf{g}_\alpha|^2 = \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial x_j}{\partial q^\alpha} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

რადგან $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ გვექნება

$$|\mathbf{g}_\alpha|^2 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} \right)^2$$

④ დეკარტეს მართკუთხა სისტემაში E^3 ტოლია 1.

$|\mathbf{g}_\alpha| \equiv h_\alpha$ ლამეს პარამეტრები^⑤ ეწოდება: ^⑥

$$h_\alpha = |\mathbf{g}_\alpha| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\partial x_i / \partial q^\alpha)^2} \quad (1.16)$$

ეხლა შეგვიძლია შემოვიტანოთ ერთეულოვანი ბაზისი

$$\mathbf{e}_{q_\alpha} = \mathbf{g}_\alpha / h_\alpha$$

ჩავსვათ $\mathbf{r}$ გაშლის ფორმულა და მივიღებთ მართკუთხა, დეკარტეს საკოორდინატო სისტემიდან, მრუდწირულ სისტემაში გადასვლისას ახალი ორტების ფორმულას ^⑦

$$\mathbf{e}_{q_\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial x_i}{\partial q^\alpha} \quad (1.17)$$

აქ $\mathbf{e}_{q_\alpha}$ არის მრუდწირული საკოორდინატო სისტემის ორტები, ხოლო $\mathbf{e}_i$ — ევკლიდური სისტემის.

ამ საკოორდინატო ბაზისში ვექტორი ცალსახად გაიშლება საბაზისო ორტების საშუალებით:

$$\vec{P} = P_1^* \mathbf{e}_{q_1} + P_2^* \mathbf{e}_{q_2} + P_3^* \mathbf{e}_{q_3}$$

P_1^*, P_2^*, P_3^* კოორდინატებს ვექტორის ფიზიკური/ განსხვავებით ბუნებრივი კომპონენტებისგან/ „Physical/Natural coordinates“/ კოორდინატები ეწოდებათ. ამ კოორდინატების/ვექტორების შემთხვევაში ვექტორის „ფიზიკური კომპონენტების“ აზრი ისაა რომ მათ აქვთ ერთი და იგივე განზომილება. $\mathbf{g}_\alpha$ ბაზისში მოცემული კომპონენტები არიან ბუნებრივი კომპონენტები, ხოლო $\mathbf{e}_{q_\alpha}$ არის ფიზიკური ბაზისი და მასში მოცემული კომპონენტები არიან ფიზიკური კომპონენტები.

მაგალითად, $\mathbf{v} = v^1 \mathbf{g}_1 + v^2 \mathbf{g}_2 = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$. აქ v^1, v^2 , აღნიშნავს ბუნებრივ კოორდინატებს, ხოლო v_r, v_θ ფიზიკურ კოორდინატებს. კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტების განზომილებები შეიძლება/და არის/ სხვადასხვა.

ამას გარდა არსებობს ასევე კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კოორდინატებიც. ზოგიერთ ლიტერატურაში საუბარია „კოვარიანტულ კომპონენტებზე/კოორდინატებზე“ ზოგიერთ ლიტერატურაში „კოვარიანტულ / კონტრავარიანტულ ბაზისზე“. მაგ. ლ.ჭილაშვილის და ა.რუხაძის სახელმძღვანელოებში საუბარია კო და კონტრავარიანტული ვექტორების კოორდინატებზე და არა ბაზისზე რა ბაზისშიც იშლებიან ეს ვექტორები. ამრიგად შემოტანილია კო/კონტრა ვექტორის

^⑤ ასევე უწოდებენ მასშტაბურ მამრავლებს და მეტრიკულ კოეფიციენტებს

^⑥ ზოგიერთ ლიტერატურაში გამოყენებულია აღნიშვნა h_{ii} (აქ განმეორებული ინდექსით ჯამი არ იგულისხმება) ან H_i

^⑦ დაწვ. იხ. გ.ჭილაშვილი [chilashvili]

და არა კო/კონტრა ბაზისის ცნებები. უნდა გავსზოვდეს რომ „კოვარიანტობა/კონტრავარიანტობა“ განმარტებულია იმის მიხედვით თუ როგორ იქცევა ეს ობიექტი საკოორდინატო სისტემის გარდაქმნებისას. როგორც არ უნდა იქცეოდეს კომპონენტები და საბაზისო ვექტორები გარდაიქმნება შებრუნებული წესით. ანუ თუ ვაბრუნებთ სისტემას და კომპონენტები გარდაიქმნებიან როგორც კოორდინატები/დიფერენციალები/ მობრუნებისას⁽⁸⁾ მაშინ ამბობენ, რომ გვაქვს კონტრავარიანტული ვექტორი⁽⁹⁾ და ამ შემთხვევაში ამ ვექტორის ბაზისი არის კოვარიანტული ვექტორები⁽¹⁰⁾.

კონტრავარიანტული ბაზისის შემთხვევაში კი ვექტორის კომპონენტები გარდაიქმნიან კოვარიანტული წესით. ანუ ვექტორი შეგვიძლია წარმოვადგინოთ კოვარიანტული ბაზისში კონტრავარიანტული კომპონენტებით ან კონტრავარიანტულ ბაზისში კოვარიანტული კომპონენტებით.

(კო) კონტრავარიანტული კომპონენტების და (კო) კონტრავარიანტული ბაზისების შესახებ იხ. **მობრუნებები, მრუდწირული კოორდინატები, ტენზორები** დეკარტეს საკოორდინატო სისტემებში ამ კო და კონტრავარიანტულ კოორდინატებს შორის განსხვავება არაა. ორთოგონალურ მრუდწირულ საკოორდინატო სისტემებში კო და კონტრა ბაზისებს ერთი და იგივე მიმართულება აქვს. განსხვავებულია ერთეულოვანი ორტების სიგრძეები. იხ. დანართი **1 კო- და კონტრავარიანტული მდგენელები** გვ. 66 ასევე ეს დოკუმენტი **მრუდწირული კოორდინატები**

§4 ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა

ცილინდრულ საკოორდინატო სისტემაში გვაქვს:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \phi \\y &= \rho \sin \phi \\z &= z\end{aligned}\tag{1.18}$$

ამ შემთხვევაში $q_1 = \rho, q_2 = \phi, q_3 = z$ და $\mathbf{e}_{q_\alpha}$ ორტები: $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$. ვიცით რა ვექტორი დეკარტეს კოორდინატებში

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z\tag{1.19}$$

და ვექტორი ცილინდრულ კოორდინატებში ჩაიწერება როგორც

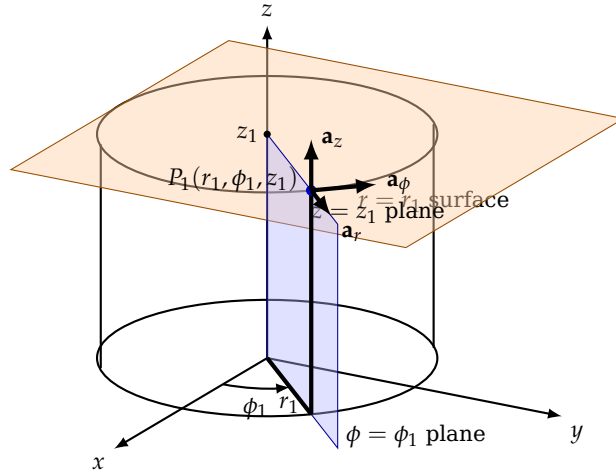
$$\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\phi \mathbf{e}_\phi + A_z \mathbf{e}_z\tag{1.20}$$

ვიპოვნოთ კავშირი ვექტორის ცილინდრულ და დეკარტის კოორდინატებს შორის. გან. (1.20) გავამრავლოთ ორივე მხარეს $\mathbf{e}_x$. გვექნება

⁽⁸⁾რიმანის სივრცის შემთხვევაში გარდაქმნა ზოგადად არ არის მობრუნება, უფრო მეტიც ის შეიძლება არც იყოს ორთოგონალური გარდაქმნა

⁽⁹⁾კომპონენტების ინდექსები ზემოთაა

⁽¹⁰⁾საბაზისო ორტების ინდექსები ქვემოთაა, გარდაიქმნიან როგორც გრადიენტი



სურ 1.1: ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_x = A_x \mathbf{e}_\rho \cdot \mathbf{e}_x + A_\phi \mathbf{e}_\phi \cdot \mathbf{e}_x + A_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x \quad (1.21)$$

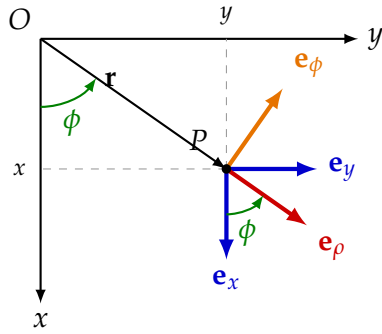
ამას გარდა სურ.1.2 ჩანს რომ

$$\mathbf{e}_x \mathbf{e}_\rho = \cos\phi \quad \mathbf{e}_y \mathbf{e}_\rho = \sin\phi \quad (1.22a)$$

$$\mathbf{e}_x \mathbf{e}_\phi = -\sin\phi \quad \mathbf{e}_y \mathbf{e}_\phi = \cos\phi \quad (1.22b)$$

ჩავსვათ ეს ზემოთ მოყვანილ ფორმულაში და მივიღებთ

$$A_x = A_\rho \cos\phi - A_\phi \sin\phi \quad (1.23)$$



სურ 1.2: კომპონენტები ცილინდრულ სისტემაში ანალოგიურად (შეამოწმეთ)

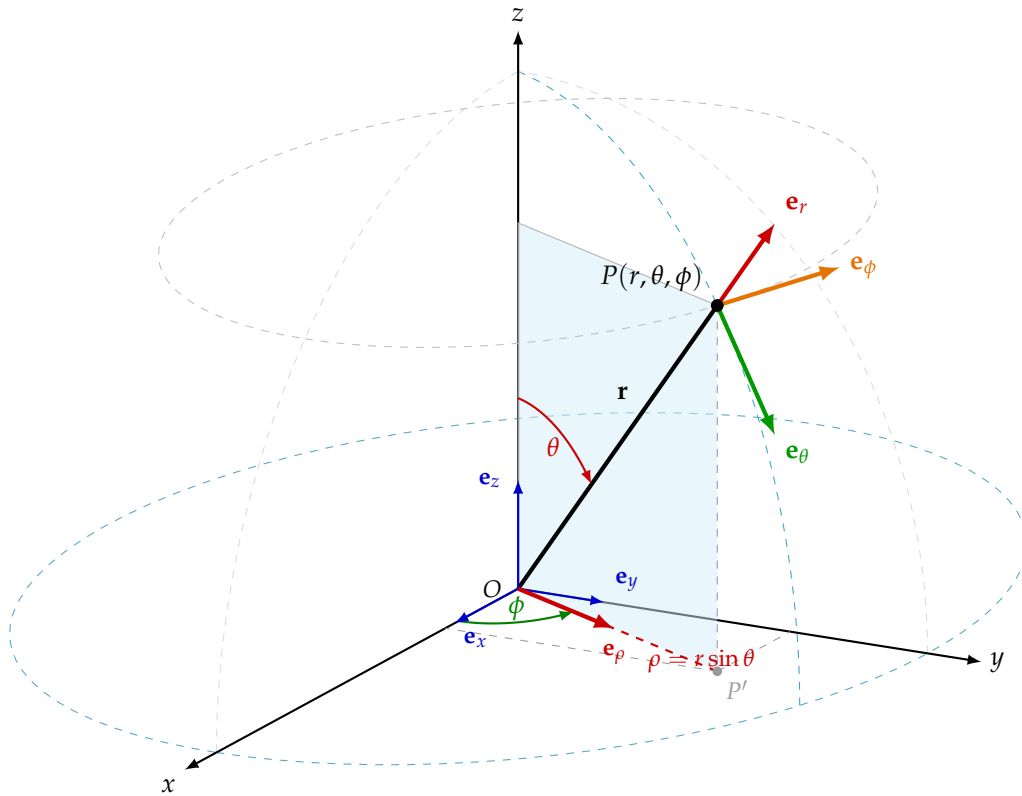
$$A_y = A_\rho \sin\phi + A_\phi \cos\phi \quad (1.24)$$

A_ρ და A_ϕ თუ გამოვსახავთ ზემოთ მიღებული განტოლებებიდან მივიღებთ კავშირს ცილინდრულსა და დეკარტის მდგენელებს შორის. იგივე შეგვიძლია მივიღოთ სხვა გზით მაგ. A_ρ მივიღებთ თუ გან. (1.19) გავამრავლებთ $\mathbf{e}_\rho$, ხოლო $A_\phi - \mathbf{e}_\phi$ -ზე (შეამოწმეთ) ეხლა გამოვსახოთ ცილინდრული კომპონენტები

$$A_\rho = A_x \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\rho + A_y \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\rho + A_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\rho \quad (1.25)$$

$$A_\phi = A_x \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\phi + A_y \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\phi + A_z \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\phi \quad (1.26)$$

ცხადია A_z იგივეა ორივე სისტემაში და გამოთვლას არ საჭიროებს.



სურ 1.3: სფერული საკოორდინატო სისტემა, ორტები $P(r, \theta, \phi)$ წერტილში და e_ρ პროექცია xy -სიბრტყეზე

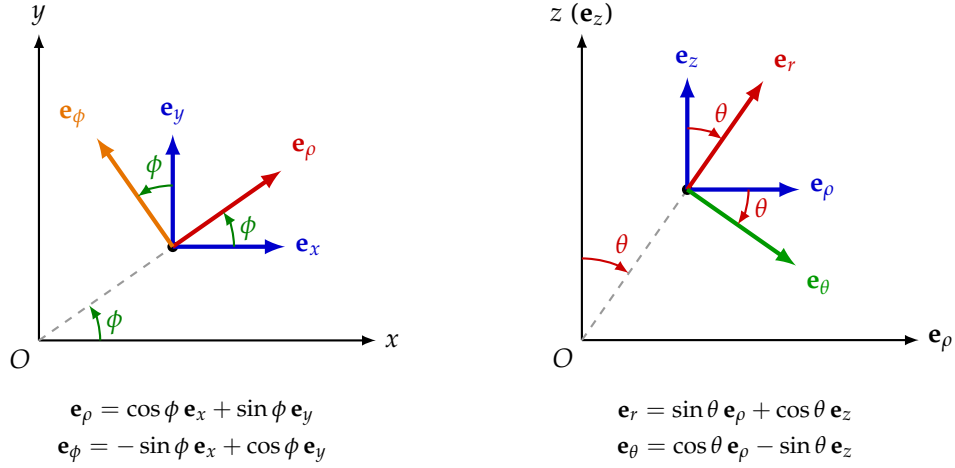
დავალეზა №1.3

გამოთვალეთ ლამეს პარამეტრები, სიგრძის, ფართის და მოცულობის ელემენტები. გამოვსახოთ ერთეულოვანი ორტები დეკარტის ორტების საშუალებით. მიიღეთ (1.21)–(1.26) ფორმულები ალგებრული გზით გან. (1.16) და გან. (1.17) ფორმულების გამოყენებით

§5 სფერული საკოორდინატო სისტემა

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.27)$$

ამ შემთხვევაში $q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \phi$ (სურ. 1.3).



სურ. 1.4: სფერული საკოორდინატო სისტემის ორტების პროექციები და კავშირი დეკარტეს ორტებთან

ვიპოვნოთ კავშირი დეკარტეს და სფერული საკოორდინატო სისტემის ორტებს შორის. სურ.1.4 ა) დან ჩანს, რომ (xy -სიბრტყეზე პროექცია) უშუალოდ ჩანს $\mathbf{e}_\rho$ და $\mathbf{e}_\phi$ ორტების დაშლა დეკარტეს $\mathbf{e}_x$ და $\mathbf{e}_y$ ორტებით:

$$\mathbf{e}_\rho = \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y \quad (1.28)$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \quad (1.29)$$

ბ) ნახაზიდან (ვერტიკალური სიბრტყე) ვპოულობთ $\mathbf{e}_r$ და $\mathbf{e}_\theta$ ორტების კავშირს $\mathbf{e}_\rho$ და $\mathbf{e}_z$ ორტებთან:

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \mathbf{e}_\rho + \cos \theta \mathbf{e}_z \quad (1.30)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \mathbf{e}_\rho - \sin \theta \mathbf{e}_z \quad (1.31)$$

(1.28) გამოსახულების ჩასმით (1.30) და (1.31) ტოლობებში, ვიღებთ საბოლოო კავშირს სფერულ და დეკარტეს ორტებს შორის:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\phi &= -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (1.32)$$

შებრუნებული გარდაქმნებით, ან ანალოგიური, გეომეტრიული მეთოდით რაც გამოვიყენეთ ცილინდრულ საკოორდინატო სისტემისთვის, გვექნება

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_y &= \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_\theta + \cos \phi \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_z &= \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (1.33)$$

დავალება №1.4

1. გამოსახეთ $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x(x+y) - \mathbf{e}_y(x-y) + \mathbf{e}_z z$ სფერულ კოორდინატებში.
2. გამოიყვანეთ გარდაქმნის ფორმულები ალგებრული განტოლებებიდან.

დავალება №1.5

გამოთვალეთ ლამეს პარამეტრები, სიგრძის, ფართის და მოცულობის ელემენტები.

§6 სკალარული ველის გრადიენტი

გრადიენტი აჩვენებს სკალარული ველის უსწრაფესი ზრდის მიმართულებას და წარმოადგენს სკალარული ველის დიფერენციალურ მახასიათებელს.

შემოვიტანოთ ვექტორული, წრფივი ოპერატორი ნაბლა ∇ (ჰამილტონის ოპერატორი)

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.34)$$

მაშინ

$$\text{grad } \varphi \equiv \nabla \varphi \quad (1.35)$$

სკალარული ველის წარმოებული რაიმე $\vec{l}$ ვექტორის გასწვრივ იქნება $\vec{l} \cdot \nabla \varphi$ ველს $\vec{F} = \nabla \varphi$ პოტენციალური ველი ეწოდება, ხოლო φ - პოტენციალი.

ტენზორულ აღნიშვნებში:

$$F_i = \nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \quad (1.36)$$

§6.1 მაგალითი: რადიუს ვექტორის მოდულის გრადიენტი

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის მოდულის გრადიენტი

$\mathbf{r} = \mathbf{e}_x x + \mathbf{e}_y y + \mathbf{e}_z z$ მოდული:

$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ხოლო გრადიენტი იქნება :

$$\nabla r = \mathbf{e}_x \frac{\partial r}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial r}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial r}{\partial z} \quad (1.37)$$

გამოვთვალოთ კერძო წარმოებული

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

ანუ

$$\nabla r = \mathbf{e}_x \frac{x}{r} + \mathbf{e}_y \frac{y}{r} + \mathbf{e}_z \frac{z}{r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

იგივე ტენზორულ (კომპონენტურ) ფორმალიზმში გვექნება:

$$\nabla r = \mathbf{e}_i \frac{\partial r}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \frac{\frac{\partial(x_j x_j)}{\partial x_i}}{2r} = \mathbf{e}_i \frac{2x_i}{2r} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

რაც იგივეა რაც ზემოთ მოყვანილი ტოლობა.

§6.2 მაგალითი: რადიუს ვექტორის კვადრატის გრადიენტი.

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის კვადრატის გრადიენტი.

$$\nabla r^2 = \nabla (x^2 + y^2 + z^2) = \mathbf{e}_x 2x + \mathbf{e}_y 2y + \mathbf{e}_z 2z = 2\mathbf{r}$$

ზოგადად:

$$\nabla r^n = n r^{n-2} \mathbf{r} \quad (1.38)$$

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{2} r^{-3} (2x\mathbf{e}_x + 2y\mathbf{e}_y + 2z\mathbf{e}_z) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.39)$$

ვექტორული ველის შემთხვევაში დიფერენციალური მახასიათებლებია ველის დივერგენცია და როტორი .

§7 ვექტორული ველის დივერგენცია

დივერგენცია სკალარული სიდიდეა და განიმარტება წერტილში

$$\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (1.40)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right] \quad (1.41)$$

დეკარტეს მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y + \partial A_z / \partial z \quad (1.42)$$

დავალეზა №1.6

1. გამოიყვანეთ დივერგენცია სფერულ კოორდინატებში
2. გამოიყვანეთ დივერგენცია ცილინდრულ კოორდინატებში

თუ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, ასეთ ველს სოლენოიდური ველი ეწოდება. დივერგენციის ინტეგრალური განმარტება: ვექტორის ნაკადი ერთეულოვანი მოცულობის მქონე სხეულის ერთეულოვანი ფართობის მქონე შემოქმადვრელი ზედაპირიდან (გაუს—ოლტროგრადსკის თეორემა).

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} dV = \int_S \mathbf{A} \cdot d\vec{s} \quad (1.43)$$

მაგალითები

§7.1 მაგალითი: რადიუს ვექტორის დივერგენცია

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის დივერგენცია $\nabla \cdot \mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = e_x x + e_y y + e_z z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

ცილინდრულ სისტემაში:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.44)$$

გავშალოთ $\mathbf{r}$ კომპონენტებად:

$$\mathbf{r} = e_r r + e_z z$$

აქედან მივიღებთ

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{r} 2r + 1 = 3$$

§7.2 მაგალითი: რადიუს ვექტორის და სკალარული ფუნქციის ნამრავლის დივერგენცია

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის და სკალარული ფუნქციის ნამრავლის დივერგენცია. ვთქვათ $\mathbf{K} = \mathbf{r} \varphi(r)$ მაშინ:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{K} &= \nabla \cdot (\mathbf{r} \varphi(r)) = (\nabla \cdot \mathbf{r}) \varphi(r) + \mathbf{r} \cdot \nabla \varphi(r) = \\ &= \varphi(r) \nabla \cdot \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \nabla \varphi(r) \end{aligned} \quad (1.45)$$

§7.3 მაგალითი: რადიუს ვექტორის ნაკადი სფერულ ზედაპირში

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის ნაკადი სფერულ ზედაპირში. ეს შეგვიძლია გამოვთვალოთ ორი გზით: ა). ნაკადის განმარტება

$$\Phi = \int_S \vec{r} \cdot d\vec{s}$$

სფერული სიმეტრიის გამო:

$$\Phi = \int_S r \, ds = r \int_S ds = r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi r^3$$

ბ). ნაკადი ზედაპირში დაკავშირებულია მოცულობით ინტეგრალთან გაუსის თეორემით. ანუ:

$$\Phi = \int_V \nabla \cdot \mathbf{r} \, dv = 3 \int_V dv = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = 4\pi r^3$$

მაგალითი: რადიუს ვექტორის ნაკადი ცილინდრული ზედაპირში

გამოვთვალოთ რადიუს ვექტორის ნაკადი ცილინდრული ზედაპირში რადიუსით a და სიმაღლით $z = h$. ამ შემთხვევაში ა) მიდგომით გამოთვლა რთულია (გამოსათვლელია $\vec{r} \cdot d\vec{s}$ ცილინდრისათვის) და უმჯობესია გამოვიყენოთ გაუსის თეორემა

$$\Phi = \int_V \nabla \cdot \mathbf{r} \, dV = 3 \int_V dV = 3 (\pi a^2) h$$

§8 ვექტორული ველის როტორი

ვექტორის როტორი აღინიშნება როგორც $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \nabla \times \mathbf{A}$ (ზოგიერთ ინგლისურენოვან ლიტერატურაში აღნიშნავენ - $\text{curl } \mathbf{A}$) განვიხილოთ შეკრული წირის გასვრივ ინტეგრალი ვექტორული ველიდან: $\int_C \mathbf{A} \cdot d\vec{l}$. მაშინ ვექტორის როტორი ეწოდება:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \mathbf{n} \int_C \mathbf{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.46)$$

თუ როტორი ნულია ასეთ ველს კონსერვატიული ეწოდება. თუ ველის როტორიდან ავიღებთ ზედაპირულ ინტეგრალს ადგილი აქვს სტოქსის თეორემას:

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\vec{s} = \int_C \mathbf{A} \cdot d\vec{l} \quad (1.47)$$

ჩაკეტილი ზედაპირისთვის კი

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\vec{s} = 0$$

როტორი მრუდწირულ კოორდინატებში:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_{q1} h_1 & \mathbf{e}_{q2} h_2 & \mathbf{e}_{q3} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (1.48)$$

დეკარტის მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში გვაქვს:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = & \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \\ & + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \\ & + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.49)$$

დავალემა №1.7

- ა. გამოიყვანეთ როტორი სფერული საკოორდინატო სისტემისათვის.
- ბ. გამოიყვანეთ როტორი ცილინდრული საკოორდინატო სისტემისათვის.

ელექტროსტატიკა

§9	კულონის კანონი	20
§10	ელექტრული ველი	20
§10.1	წერტილოვანი მუხტების სიმკვრივე და დელტა ფუნქცია.	21
§10.2	მაგალითი: დამუხტული ძაფის მიერ შექმნილი ველი	22
§10.3	მაგალითი: დამუხტული რგოლის ველი	23
§10.4	მაგალითი: დამუხტული სიბრტყის ველი	24
§11	გაუსის კანონი	24
§12	გაუსის კანონის დიფერენციალური ფორმა	26
§13	ველის როტორი და სკალარული პოტენციალი	26
§14	პუასონის და ლაპლასის განტოლებები	27
§15	ლაპლასიანი და დელტა ფუნქცია	28
§16	ელექტრული ველის ენერგია	29
§17	გამტარი ელექტროსტატიკურ ველში	32
§17.1	სასაზღვრო პირობები	32
§17.2	გამტარის ზედაპირზე მოქმედი ძალა	34
§17.3	გამტარები ელექტრულ ველში	35
§18	პოტენციალი და გრინის ფუნქცია	36
§18.1	გრინის თეორემა	37
§18.2	გრინის თეორემის გამოყენება	38
§18.3	გრინის თეორემა და სასაზღვრო პირობები	39
§18.4	ამონახსენის ერთადერთობა და სასაზღვრო პირობები	39
§18.5	გრინის ფუნქცია და სასაზღვრო პირობები	40
§18.6	გრინის თეორემა და ნეიმანის სასაზღვრო პირობა.	42

ამ თავში განხილულ იქნება ელექტროსტატიკის ამოცანები. ლაპლასის და პუასონის განტოლებები.

გავიხსენოთ მაქსველის განტოლებები:

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (2.1\text{ა})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2.1\text{ბ})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (2.1\text{გ})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (2.1\text{დ})$$

და მატერიალური განტოლებები :

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2\text{ა})$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}, t) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2\text{ბ})$$

ვაკუუმისთვის

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ჰ/მ} \quad (2.3\text{ა})$$

$$\epsilon = \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ფ/მ} \quad (2.3\text{ბ})$$

თუ ჩავთვლით რომ დროზე დამოკიდებულება არ გვაქვს მაშინ გან. (4.1) განტოლებათა სისტემა იყოფა ორ ნაწილად.

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.4\text{ა})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) \quad (2.4\text{ბ})$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.4\text{გ})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) \quad (2.4\text{დ})$$

ვინაიდან (2.4) განტოლებებში ელექტრული და მაგნიტური ველები განცალკევებულია შეგვიძლია განვიხილოთ ცალ-ცალკე, ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად, სტატიკური მუხტების და სტატიკური დენების ამოცანები, თუმცა შესაძლოა რომ მოცემულ ამოცანაში მონაწილეობდეს როგორც მუდმივი დენები ასევე მუხტები.

§9 კულონის კანონი

ჩარლზ კულონმა ექსპერიმენტულად დაადგინა, რომ ორი სტატიკური q_1 და q_2 მუხტისათვის მათ შორის მოქმედი ძალა:

- პროპორციული მუხტის სიდიდისა. აქვს მიზიდვის ხასიათი თუ მუხტები სხვადასხვა ნიშნისაა და განზიდვის ხასიათი თუ მუხტები ერთი ნიშნისაა.
- უკუპროპორციული მუხტებს შორის მანძილის კვადრატისა
- მიმართულია ორი მუხტის შემაერთებელი ხაზის გასწვრივ.

მათემატიკურად ამ კანონს აქვს შემდეგი სახე:

$$\mathbf{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|} \quad (2.5)$$

სადაც q_i კოორდინატია $\mathbf{x}_i$ ^①, ხოლო $\mathbf{F}_{21}$ არის ძალა 2 მუხტზე 1 მუხტის მხრიდან. k არის მუდმივა. მისი მნიშვნელობა დამოკიდებულია თუ რა საზომ სისტემა გვაქვს არჩეული. განტოლებები გან. (4.1), გან. (2.4) და გან. (2.2) ჩაწერილია საერთაშორისო SI სისტემაში. k SI აქვს სახე

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 10^{-7} \text{C}^2$$

მუხტებს შორის მოქმედი ძალისთვის ადგიული აქვს სუპერპოზიციის პრინციპს ძალა $\mathbf{F}$ q მუხტზე სხვა მუხტების q_i კოორდინატებით $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \dots, n$ არსებობისას ტოლია თითოეული მუხტიდან მოქმედი ძალების ჯამისა^②

$$\mathbf{F} = kq \sum_{i=1}^n \frac{q_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \quad (2.6)$$

სადაც ვგულისხმობთ რომ q მდებარეობს $\mathbf{x}$ წერტილში.

§10 ელექტრული ველი

ელექტრული ველი მოცემულ წერტილში განიმარტება როგორც ამ წერტილში მდებარე სანიჟ q მუხტზე მოქმედი ძალის (რომელიც გამოწვეულია სხვა q_i მუხტებისგან) ფარდობა q მუხტთან.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (2.7)$$

^①მუქი ასო ნიშნებით აღვნიშნავთ ვექტორებს

^②ეს გამოწვეულია მაქსველის გან. (4.1) განტოლებების წრფივობით

ელექტრული ველი არის ვექტორული სიდიდე, რაც ნიშნავს, რომ ის არის ვექტორული ფუნქცია $\mathbf{x}$ კოორდინატის და ავლენიანავთ როგორც $\mathbf{E}(\mathbf{x})$. SI სისტემაში ელექტრული ველის განზომილებაა ვოლტი/მეტრი. თუ მოცემულია წერტილოვანი მუხტები q_i კოორდინატებით $\mathbf{x}_i$, $i=1,2,\dots,n$, მაშინ

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \sum_{i=1}^n \frac{q_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3} \quad (2.8)$$

თუ წერილოვანი მუხტების ნაცვლად ადგილი აქვს მუხტის უწყვეტ განაწილებას მაშინ აზრის აქვს მუხტის სიმკვრივეს $\rho(\mathbf{x})$ -მუხტის რაოდენობა მოცულობის ერთეულში $\mathbf{x}$ მახლობლობაში ამ შემთხვევაში გან. (2.8) ჯამი შეიცვლება ინტეგრალით:

$$\sum_{i=1}^n q_i \rightarrow \int dV \rho(\mathbf{x}). \quad (2.9)$$

და გვექნება:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int dV' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (2.10)$$

როცა გვაქვს მუხტების დისკრეტული განაწილება კვლავ შეგვიძლია გამოვიყენოთ წარმოდგენა მუხტის სიმკვრივის შესახებ გან. (2.10), ოღონდ თითოეული მუხტი მრავლდება დირაკის დელტა ფუნქციებზე.

§10.1 წერტილოვანი მუხტების სიმკვრივე და დელტა ფუნქცია.

დელტა ფუნქცია წარმოადგენს განზოგადებულ ფუნქციას და განიმარტება შემდეგი ინტეგრალის საშუალებით:

$$f(a) = \int dx f(x) \delta(x - a) \quad (2.11)$$

სადაც $f(x)$ ნებისმიერი x მიმართ უწყვეტი ფუნქციაა, და ინტეგრების საზღვარი შეიცავს $x = a$ წერტილს

როცა $f(x) = 1$ ვღებულობთ

$$\int dx \delta(x - a) = 1, \quad (2.12)$$

დელტა ფუნქციის თვისებები:

$$\int_{a_1}^{a_2} dx f(x) \frac{d\delta(x - a)}{dx} = - \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=a} \quad (2.13)$$

და

$$\int_{a_1}^{a_2} dx \delta[f(x)] = \sum_{i=1}^N \left[1 / \left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_i} \right] \quad (2.14)$$

ბოლო გამოსახულებაში x_i წარმოადგენენ $f(x)$ ფუნქციის ნულებს a_1, a_2 შუალედში.

სამგანზომილებიანი დელტა ფუნქცია განიმარტება როგორც 3 დელტა ფუნქციის ნამრავლი დეკარტეს საკოორდინატო სისტემაში:

$$\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (2.15)$$

ეს გვაძლევს

$$\int dV f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0) \quad (2.16)$$

წერტილოვანი მუხტების სიმკვრივე შეგვიძლია წარმოვადგინოთ დელტა ფუნქციების ჯამის საშუალებით:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n q_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (2.17)$$

რაც მოგვცემს

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= k \int dV' \rho(\mathbf{x}') (\mathbf{x} - \mathbf{x}') / |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3 = \\ &= k \sum_{i=1}^n \int dV' q_i \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_i) (\mathbf{x} - \mathbf{x}') / |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3 = \\ &= k \sum_{i=1}^n q_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) / |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

რაც არის გან. (2.6).

§10.2 მაგალითი: დამუხტული ძაფის მიერ შექმნილი ველი

ვთქვათ, გვაქვს თანაბრად განაწილებული მუხტი z ღერძის მიმართ ორიენტირებულ ძაფზე λ წრფივი სიმკვრივით. ავიღოთ სიგრძის l ელემენტი (ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა) წერტილში. მაშინ ამ ელემენტზე მოსული მუხტი იქნება $\lambda dz'$. განვიხილოთ ამ ელემენტის მიერ შექმნილი ველის ველი:

$$d\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lambda dz' \frac{r\mathbf{e}_r - z'\mathbf{e}_z}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (2.19)$$

ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე ველი არაა დამოკიდებული ϕ . ავიღოთ ინტეგრალი z გასწვრივ გან. (2.19):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{z})_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \int_{-l_1}^{l_2} dz' \frac{z'}{(\mathbf{r}^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (2.20)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{z})_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda r \int_{-l_1}^{l_2} dz' \frac{1}{(\mathbf{r}^2 + z'^2)^{3/2}} \quad (2.21)$$

ინტეგრება გვაძლევს:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \mathbf{z}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\lambda \left(\frac{\mathbf{r}\mathbf{e}_z - l_2\mathbf{e}_r}{\sqrt{\mathbf{r}^2 + l_2^2}} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{e}_z + l_1\mathbf{e}_r}{\sqrt{\mathbf{r}^2 + l_1^2}} \right) \quad (2.22)$$

როცა $l_1/r \rightarrow \infty$ და $l_2/r \rightarrow \infty$, მაშინ $E_z \rightarrow 0$ და გვრჩება მხოლოდ განივი კომპონენტი:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{e}_r \quad (2.23)$$

z გასწვრივ ძაფის უსასრულობა ნიშნავს, რომ ფაქტიურად გვაქვს ორგანზომილებიანი ამოცანა. (2.23) განტოლებაში მივიღეთ, რომ ველი (და შესაბამისად მუხტზე მოქმედი ძალა) უკუპროპორციულია არა მანძილის კვადრატისა, როგორც ეს გვაქვს კულონის კანონში, არამედ მანძილის პირველი ხარისხის. რაც ნიშნავს ორგანზომილებიანი ამოცანისთვის.

§10.3 მაგალითი: დამუხტული რგოლის ველი

ვთქვათ გვაქვს $\Delta\rho$ სიგანის მქონე σ ზედაპირული სიმკვრივით თანაბრად დამუხტული r რადიუსის მქონე რგოლი. უნდა ვიპოვნოთ ელექტრული ველი z ღერძის გასწვრივ. ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე არანულოვანი გვექნება მხოლოდ E_z მდგენელი. ავიღოთ რგოლზე რაიმე მცირე ელემენტი. ამ ელემენტზე მოსული მუხტი იქნება $dq = \sigma \Delta r r d\phi$ (გვაქვს ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა) და განვიხილოთ მის მიერ შექმნილი ველი:

$$d\mathbf{E}_z = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \mathbf{e}_z \quad (2.24)$$

სადაც r' მუხტის ელემენტის რადიუს ვექტორია, ხოლო r z ღერძზე წერტილის რადიუს ვექტორი. მაშინ $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = z\mathbf{e}_z - r\mathbf{e}_r$ გათვალისწინებით:

$$d\mathbf{E}_z = \frac{dqz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \quad (2.25)$$

მთელ რგოლზე ინტეგრება მოგვცემს სრულ მუხტს რაც არის რგოლზე $Q = 2\pi\sigma\Delta r$ და ველისთვის გვექნება:

$$E = |E_z| = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}} \quad (2.26)$$

როცა $z \gg r$ მაშინ $(z^2 + r^2)^{3/2} = z^3$ რაც ნიშნავს, რომ შორ მანძილებზე ველი იქცევა როგორც წერტილოვანი მუხტის ველი.

§10.4 მაგალითი: დამუხტული სიბრტყის ველი

განვიხილოთ დამუხტული სიბრტყის ველი. განვიხილოთ სიბრტყე როგორც კონცენტრული რგოლების ერთობლიობა. რგოლის ველი კი გამოთვლილი გვაქვს ზემოთ განხილულ მაგალითში.

ერთი რგოლისათვის სიბრტყეზე გვაქვს

$$dE = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(z^2 + r^2)^{3/2}} \mathbf{e}_z \quad (2.27)$$

ზოლო ველი იქნება:

$$E_z = \frac{2\pi\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^{\infty} dr \frac{r}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_z^{\infty} dR \frac{1}{R^2} \quad (2.28)$$

ამგვარად

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \quad (2.29)$$

ანუ მივიღეთ, რომ ველი მუდმივია და არაა დამოკიდებული z კოორდინატებზე. ასე იმიტომ გამოვიდა რომ ეფექტურად გვაქვს ერთგანზომილებიანი ამოცანა (სიბრტყე უსასრულოა და სიმეტრიიდან გამომდინარე ველი არ უნდა იყოს დამოკიდებული x და y კოორდინატებზე. სიბრტყის ნებისმიერი წერტილისათვის მოიძებნება მისი სიმეტრიული წერტილი კოორდინატის სათავეს მიმართ რომლის მიერ შექმნილი ველის E_x და E_y კომპონენტები ერთმანეთს აბათილებს). და ზოგადად ერთ განზომილებიან ამოცანებში ელექტრული ველი მუდმივია მუხტის თანაბრად განაწილებისას.

§11 გაუსის კანონი

კულონის კანონი საშუალებას იძლევა სასინჯი მუხტის და ამ მუხტზე მოქმედი ძალის საშუალებით გაზომილ და გამოთვლილ იქნას ელექტრული ველი, მაგრამ ხშირ შემთხვევებში მოსახერხებელია ელექტრული ველი გამოთვლილ იქნას უშუალოდ

ან ჯერ გამოთვლილ იქნას ველის პოტენციალი, ხოლო შემდეგ ველი. აღსანიშნავია რომ ზემოთ მოყვანილი კულონის კანონი სამართლიანია 3 განზომილებიანი სივრცისათვის. ორ და ერთ განზომილებიან შემთხვევაში იცვლება როგორც ველის ფუნქცია ასევე ძალაც და პოტენციალიც. უცვლელია მხოლოდ განტოლებების სახე. ამას შემდეგ თავებში ვნახავთ. ცალკეულ შემთხვევებში ელექტრული ველი შეიძლება გამოთვლილ იქნას გაუსის კანონის საშუალებით.

განვიხილოთ ორ განზომილებიანი შემთხვევა. განვიხილოთ მუხტი, რომელიც მდებარეობს შეკრული C წირის შიგნით და განვიხილოთ ამ მუხტის მიერ შექმნილი ველის წირის ნორმალის გასწვრივი მდგენელის ინტეგრალი შეკრულ წირზე. შემდგომში ვანახებთ რომ ველი ორგანზომილებიან შემთხვევაში არის $1/(2\pi\epsilon_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)/|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2$. ელექტრული ველის კომპონენტი ნორმალის გასწვრივ არის $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 1/(2\pi\epsilon_0)q\cos(\theta)/r$, სადაც r არის მანძილი მუხტიდან საინტეგრაციო წირის წერტილამდე. $d\cos(\theta)/r$ არის რკალის ელემენტის შესაბამისი კუთხე $d\phi$ და ინტეგრალი დაიყვანება კუთხით ინტეგრებაზე. **სამ განზომილებიან შემთხვევაში** კი, ველი იცვლება, როგორც $1/r^2$ (კულონის კანონი) ხოლო $d^2x \cos\theta/r^2$ წარმოადგენს სხეულოვანი კუთხის ელემენტს $d\Omega$ რომელიც შემოსაზღვრულია S ზედაპირის ინფინიტიზიმალური ds ფართის ელემენტით ზედაპირული ინტეგრალი იცვლება სხეულოვან კუთხეზე ინტეგრებით რაც ტოლია 4π . თუ მუხტი არაა ზედაპირის შიგნით მაშინ ეს ინტეგრალი ნულის ტოლია, ვინაიდან ინტეგრებისას სხეულოვანი კუთხე შეიცვლის ნიშანს

$$\int_S ds [\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] = \begin{cases} 4\pi kq, & (q \text{ ეკუთვნის } S) \\ 0, & (q \text{ } S \text{ ზედაპირის გარეთაა}) \end{cases} \quad (2.30)$$

სუპერპოზიციის პრინციპის გამო თუ ზედაპირში იმყოფება რამდენიმე მუხტი, თითოეულს ცალცალკე შეაქვს წვლილი და გაუსის კანონს (ინტეგრალური ფორმა) აქვს სახე:

$$\int_S ds [\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] = 4\pi \cdot kQ \quad (2.31)$$

სადაც Q ზედაპირის შიგნით მყოფი სრული მუხტია,

$$Q = \int_V dV \rho(\mathbf{x}). \quad (2.32)$$

§12 გაუსის კანონის დიფერენციალური ფორმა

გაუსის კანონის დიფერენციალურ ფორმას მივიღებთ დივერგენციის თეორემის საშუალებით. ნებისმიერი $C(\mathbf{x})$ ვექტორული ველისათვის ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\int_S ds [C(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] = \int_V dV [\nabla \cdot C(\mathbf{x})]. \quad (2.33)$$

გაუსის კანონისათვის ეს გვაძლევს:

$$4\pi k \int_V dV \rho(\mathbf{x}) = \int_S ds [\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] = \int_V dV [\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})] \quad (2.34)$$

რაც გვაძლევს

$$\int_V dV [\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) - 4\pi k \rho(\mathbf{x})] = 0 \quad (2.35)$$

ვინაიდან V ნებისმიერია ინტეგრალქვეშა გამოსახულება უნდა იყოს იგივერად ნული ანუ

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi k \rho(\mathbf{x}) \quad (2.36)$$

თუ გავიხსენებთ k განმარტებას SI სისტემაში მაშინ

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) / \epsilon_0 \quad (2.37)$$

რაც არის გან. (2.4დ)

როცა გვაქვს წერტილოვანი მუხტი მაშინ:

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = q \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') / \epsilon_0 \quad (2.38)$$

§13 ველის როტორი და სკალარული პოტენციალი

ვექტორული ველის ცალსახად განსაზღვრისათვის მხოლოდ ველის დივერგენციის ცოდნა არაა საკმარისი, საჭიროა ასევე ვიცოდეთ ველის როტორი. ამ პარაგრაფში გამოვიყვანოთ ველის როტორის მნიშვნელობას და შემოვიტანოთ ველის პოტენციალის ცნებას. დავუბრუნდეთ კულონის კანონს:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = k \int dV' \rho(\mathbf{x}') \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (2.39)$$

მაგრამ ამ ინტეგრალის ნაწილი შეგვიძლია ჩავწეროთ როგორც გრადიენტი

$$\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = -\nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (2.40)$$

სადაც გრადიენტი აღებულია $\mathbf{x}$ ცვლადით^③. ამგვარად გვაქვს

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -k\nabla \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (2.41)$$

ანუ, $\mathbf{E}$ შეიძლება ჩავწეროთ როგორც უარყოფითი გრადიენტი $\mathbf{x}$ ცვლადის სკალარული ფუნქციიდან. ამ ფუნქციას ეწოდება სკალარული პოტენციალი $\Phi(\mathbf{x})$:

$$\Phi(\mathbf{x}) \equiv k \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (2.42)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x}). \quad (2.43)$$

გან. (2.43) გამომდინარეობს, რომ $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ ვინაიდან როტორი ნებისმიერი ფუნქციის გრადიენტიდან ტოლია ნულისა. ანუ გვაქვს

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 4\pi k\rho(\mathbf{x}) \quad (2.44)$$

და

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.45)$$

რაც არის მაქსველის გან. (4.1) განტოლებები გან. (2.4გ) და გან. (2.4დ) ელექტროსტატიკური $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ველისათვის.

ამ განტოლებებიდან გამომდინარეობს ასევე ერთი მნიშვნელოვანი ფაქტი: შეკრულ წირზე ველის მიერ შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია. ეს გამომწვეულია ველის გრადიენტულობიდან ანუ რაც იგივეა ველის როტორის ნულთან ტოლობით. მუშაობა (პოტენციური ენერგიის ცვლილება) განისაზღვრება მხოლოდ პოტენციალთა სხვაობით ორ წერილს შორის და არა წირით თუ რა წირზე ვმოდრობთ (გადაგვაქვს მუხტი, ვაერთებთ ამ ორ წერტილს). ამ ამოცანის ამოსახსნელად უნდა მოვათავსოთ გამოსახულება მუხტები ისე რომ დაკმაყოფილდეს სასაზღვრო პირობა. ამისათვის საჭიროა ხუთი გამოსახულება მუხტი როგორც ეს აღნიშნულია ზემოთ სურ. ?? მათ აქვთ იგივე ρ და z კოორდინატი რაც აქვს რეალური მუხტს, გან. (2.51) 28

§14 პუასონის და ლაპლასის განტოლებები

$\mathbf{E}$ თვის მიღებული განტოლებები სასაზღვრო პირობებით საკმარისია ვიპოვნოთ ველი მუხტის მოცემული განაწილებისათვის, მაგრამ ხშირად მოსახერხებელია ჯერ ვიპოვნოთ Φ , ხოლო შემდეგ $\mathbf{E}$. ვინაიდან $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k\rho$, და $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, გვაქვს

$$\nabla \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}) \equiv \nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -4\pi k\rho(\mathbf{x}) \quad \text{პუასონის განტოლება} \quad (2.46)$$

^③ $\mathbf{x}$ აღნიშნავს კოორდინატს სადაც ვითვლით ველს, რომელსაც ქმნის მუხტი $\mathbf{x}'$ კოორდინატი

∇^2 არის ლაპლასის ოპერატორი. იმ არეში სადაც მუხტი არაა გან. (2.46) ნაცვლად გვაქვს

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = 0 \text{ ლაპლასის განტოლება,} \quad (2.47)$$

§15 ლაპლასიანი და დელტა ფუნქცია

განვიხილოთ როგორ მოქმედებს ∇^2 პოტენციალზე Φ :

$$-4\pi k \rho(\mathbf{x}) = \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}) = k \int dV' \rho(\mathbf{x}') \nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (2.48)$$

რაც გვაძლევს

$$\rho(\mathbf{x}) = - \int dV' \rho(\mathbf{x}') \left(\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \quad (2.49)$$

$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ განმარტებულია როგორც

$$f(\mathbf{x}) = \int dV' f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.50)$$

ნებისმიერი $f(\mathbf{x})$. $\rho(\mathbf{x})$ შეიძლება იყოს ნებისმიერი, რაც ნიშნავს რომ უნდა სრულდებოდეს ტოლობა

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (2.51)$$

ეს განტოლება გაუსის ერთეულოვან სისტემაში ($k = 1$) წარმოადგენს პუასონის განტოლებას ერთეულოვანი წერტილოვანი მუხტისთვის სიმკვრივით $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ და პოტენციალით $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') / |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ (მუხტი მდებარეობს $\mathbf{x}'$ წერტილში და ქმნის პოტენციალს $\mathbf{x}$ წერტილში), მაგრამ არა SI სისტემაში. SI სისტემაში ორივე მხარე უნდა გავამრავლოთ k -ზე. გან. (2.51) შეგვიძლია მივიღოთ სხვა გზითაც. გადავიდეთ სფერულ კოორდინატებში.

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) = \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left(r \frac{1}{r} \right) = 0, \quad (2.52)$$

ეს ძალაშია ყველგან გარდა $r = 0$ სადაც r/r არაა განმარტებული. რომ ვნახოთ რა ხდება ამ წერტილში ვაინტეგრირებთ $\nabla^2(1/r)$ სფეროზე ცენტრით კოორდინატა სათავეში:

$$\begin{aligned}
 \int_V dV \nabla^2(1/r) &= \int_V dV \nabla \cdot \nabla(1/r) = \\
 \int_S ds [\nabla(1/r)] \cdot \mathbf{n} &= - \int_S ds (1/r^2) = \\
 - \int r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi (1/r^2) &= -4\pi.
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

ამგვარად გვაქვს:

$$\begin{aligned}
 (\text{რ}) \quad \nabla^2(1/r) &= 0, \quad r \neq 0 \\
 (\text{ყ}) \quad \int_V dV \nabla^2(1/r) &= -1/4\pi, \quad r = 0 \quad V \text{ მოცულობაში.}
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

რაც ნიშნავს რომ

$$\nabla^2(1/r) = -4\pi\delta(\mathbf{x})$$

§16 ელექტრული ველის ენერგია

განვიხილოთ ელექტროსტატიკური ველი ენერგია. ვთქვათ გვაქვს n რაოდენობის წერტილოვანი მუხტი q_i კოორდინატით $\mathbf{x}_i$. მუშაობა რომელიც საჭიროა ელექტრულ ველში არსებული q მუხტის ერთი წერილიდან მეორეში გადასატანად ტოლია q ნამრავლისა ამ ორ წერტილს შორის პოტენციალთა სხვაობაზე. თუ დავუშვებთ რომ ეს პოტენციალი შექმნილია წერტილოვანი მუხტების მიერ გვექნება:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n [q_i / |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|] \tag{2.55}$$

და მუშაობა რომელიც საჭიროა შესრულდეს იმისათვის, რომ q გადავიტანოთ უსასრულობიდან, სადაც $\Phi(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x}$ წერტილში არის

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \sum_{i=1}^n [q_i / |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|]. \tag{2.56}$$

რაც ნიშნავს, რომ მუხტების სისტემის ენერგია იზრდება, როდესაც ვუმატებთ მუხტს. ეს მიდგომა შეგვიძლია გამოვიყენოთ მუხტების სისტემის ენერგიის გამოთვლა. ვთქვათ მოცემულ სასრულ არეში არავითარი მუხტი არ გვაქვს და სათითაოდ უსასრულობიდან ვუმატებთ ახალ მუხტს (ვთვლით რომ უსასრულობაში მუხტებს

შორის დაშორება დიდია, ანუ არ ურთიერთქმედებენ). პირველი მუხტის მოსატანად $\mathbf{x}_1$ წერტილში არავითარი მუშაობა არ სრულდება, ვინაიდან $\Phi = 0$, როცა სხვა მუხტები არ გვაქვს. მეორე მუხტის მოსატანად საჭიროა დაიხარჯოს ენერგია:

$$W_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}. \quad (2.57)$$

მესამე მუხტის მოსატანად

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \sum_{j=1}^2 \frac{q_j}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_j|}, \quad (2.58)$$

და ა.შ. სრული მუშაობა რომელიც საჭიროა შესრულდეს i ური მუხტისათვის არის:

$$W_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}. \quad (2.59)$$

თუ შევკრებთ ყველა ამ ენერგიას მაშინ სრული მუშაობა, ანუ მუხტების სისტემის ენერგია ტოლია:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad (2.60)$$

სადაც ჯამი აღებულია ყოველი წყვილით და წყვილი ჩათვლილია მხოლოდ ერთხელ; ეს შეგვიძლია ასეც გადავწეროთ:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}; \quad (2.61)$$

სადაც შტრიხ ნიშანი ნიშნავს რომ $i = j$ წევრები გამოტოვებულია. ამ ჯამში შედის ყოველი i, j $i \neq j$ წყვილი ორჯერ ამიტომ წინ აქვს მამრავლი $1/2$. იგივე მსჯელობა შეგვიძლია გამოვიყენოთ მუხტის უწყვეტი განაწილებისათვის, თუ დავუშვებთ რომ უსასრულო მცირე მოცულობებში გვაქვს სასრული მუხტის სიმკვრივე (და არა წერტილოვანი მუხტები) გვექნება

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \int dV dV' \frac{\rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (2.62)$$

ამ შემთხვევაში ინტეგრება არაა შეზღუდული და შეიცავს წერტილს $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, ვინაიდან უსასრულოდ მცირე მოცულობაში განაწილებული მუხტის ურთიერთქმედების ენერგია საკუთარ თავთან მიისწრაფვის ნულისკენ, როცა მოცულობა მიისწრაფვის ნულისკენ. ამგვარად, თუ მოცულობაში მუხტის უწყვეტ განაწილებასთან ერთად გვაქვს სხვა სასრული (წერტილოვანი) მუხტები, რომელბიც წარმოდგება დელტა ფუნქციის საშუალებით $\rho(\mathbf{x})$ სიმკვრივის ფუნქციაში, მაშინ აუცილებელია ასეთი

მუხტების თვითურთიერთქმედების გამორიცხვა, როგორც ეს არის გათვალისწინებული ზემოთ მოყვანილ სასრულ ჯამში, იმისათვის, რომ ენერგია იყოს სასრული.

ენერგიის W გამოსახულება შეიძლება ჩაწერილ იქნას სხვადასხვა ფორმით. გავიხსენოთ რომ,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}; \quad (2.63)$$

ამის ჩასმა W ენერგიის გამოსახულებაში გვაძლევს:

$$W = \frac{1}{2} \int dV \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.64)$$

ამას გარდა $\rho(\mathbf{x}) = -\epsilon_0 \nabla^2 \Phi(\mathbf{x})$, რაც მოგვცემს

$$W = -\frac{\epsilon_0}{2} \int dV \Phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.65)$$

ავიღოთ ეს ინტეგრალი ნაწილობითი ინტეგრებით. ამისათვის გამოვიყენოთ დივერგენციის თეორემა. $f(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ვექტორული ველისათვის განვიხილოთ ინტეგრალი:

$$\begin{aligned} \int_V dV \nabla \cdot [f(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})] &= \int_S ds f(\mathbf{x}) [\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] \\ &= \int_V dV [\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})] + \int_V dV f(\mathbf{x}) [\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (2.66)$$

ანუ

$$\int_V dV f(\mathbf{x}) [\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})] = - \int_V dV [\nabla f(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \int_S ds f(\mathbf{x}) [\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}], \quad (2.67)$$

ამ ფორმულას თუ გამოვიყენებთ W ენერგიის ინტეგრალისთვის:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{\epsilon_0}{2} \int dV \Phi(\mathbf{x}) \nabla \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV \nabla \Phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{x}) - \int_S ds \Phi(\mathbf{x}) [\nabla \Phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] \end{aligned} \quad (2.68)$$

ანუ

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV [\mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})]. \quad (2.69)$$

ზედაპირული ინტეგრალი ნულია ვინაიდან Φ მცირდება მუხტის განაწილების არედან შორს r მანძილზე როგორც $1/r$. მაშინ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ეცემა, როგორც $1/r^3$, მაშინ როცა r მანძილზე ფართობი არის r^2 რიგის. რაც ნიშნავს რომ შორ მანძილებზე ინტეგრალი ეცემა როგორც $1/r$ და ამგვარად ნულია უსასრულობაში.

ინტეგრალქვეშა გამოსახულების ინტერპრეტირება შეიძლება როგორც ელექტრული ველის ენერგიის სიმკვრივე $u(\mathbf{x})$

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) \quad (2.70)$$

მაგრამ ეს მხოლოდ ინტერპრეტაციაა. ჩვენ ვიცით მხოლოდ ამ სიდიდის ინტეგრალის მნიშვნელობა მთელ სივრცეში. ამგვარი ინტერპრეტაციის საშუალებას იძლევა ის ფაქტი რომ $u(\mathbf{x})$ ყველგან დადებითია ან ნული. ასევე შევნიშნოთ, რომ ენერგიის მეორე გამოსახულებში გვაქვს $\rho(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})/2$, რაც შეიძლება იყოს როგორც დადებითი ასევე უარყოფითი და არ შეიძლება მისი ინტერპრეტირება როგორც ენერგიის სიმკვრივისა.

W გამოსახულებიდან ჩანს, რომ გან. (2.70) ენერგია არის დადებითად განმარტებული. მეორე მხრივ დადებითი და უარყოფითი მუხტების წყვილის q და $-q$, კოორდინატებით $\mathbf{x}$ და $\mathbf{x}'$ არის უარყოფითი, კერძოდ $-q^2/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. მიზეზი ისაა, რომ ორი წერტილოვანი მუხტისათვის ენერგიის გამოსახულებაში არ შედის ამ ორი მუხტის შექმნაზე დახარჯული დადებითი, უსასრულო ენერგია მაგრამ გან. (2.70) ეს ენერგია შედის. ამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ ორი სხვადასხვა ნიშნით დამუხტული სხეული ენერგია რომელიც საჭიროა რომ ეს სხეულები მოვიტანოთ უსასრულობიდან მოცემულ წერტილებში არის უარყოფითი სურ. ??, მაშინ როცა მუხტების ამ განაწილების ``ასაწყობად'', ანუ ნაწილ ნაწილ უსასრულობიდან მოსატანად საჭიროა დადებითი ენერგია სურ. ??.

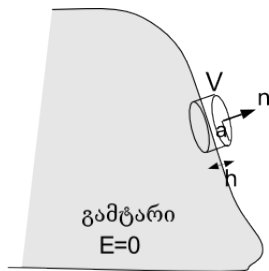
§17 გამტარი ელექტროსტატიკურ ველში

ელექტრომაგნიტური ამოცანების ამოსახსნელად მნიშვნელოვანია თუ როგორ იქცევა ველი ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე. ამ შემთხვევაში განვიხილოთ გამტარი-ჰაერის სასაზღვრო შემთხვევა (ორი სხვადასხვა დიელექტრიკული გარემოს შორის სასაზღვრო პირობას მოგვიანებით განვიხილავთ).

§17.1 სასაზღვრო პირობები

განვიხილოთ გამტარი ელექტროსტატიკურ ველში. გამტარის შიგნით ველი ნულია. ველი გამტარის ზედაპირზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ელექტროსტატიკის განტოლებების: $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})/\epsilon_0$ და $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ საშუალებით.

განვიხილოთ გაუსის კანონი (პირველი განტოლება). ავიღოთ ინტეგრალი. სურათზე 2.1 აღნიშნულ ცილინდრულ (დერძი მიმართულია ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ) ზედაპირზე. ცილინდრის ნახევარი მდებარეობს ჰაერში მეორე ნახევარი კი გამტარში.



სურ 2.1: ლითონი- ჰაერი საზღვრო პირობა

დივერგენციის თეორემის გამოყენებით მოცულობითი ინტეგრალი შეგვიძლია გადავიყვანოთ ზედაპირულში. დავუშვათ რომ ცილინდრის სიმაღლე h გაცილებით ნაკლებია რადიუსზე $h \ll a$. მაშინ ინტეგრალში წვლილს შეიტანს მხოლოდ ცილინდრის ბოლოები და მასში გამავალი ველის ნაკადი.

ამავე დროს $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0$ გამტარში, ამრიგად ინტეგრალში რჩება მხოლოდ გამტარის ზედაპირის მიმართ ველის ნორმალური მდგენელი (ნორმალის მიმართულია გამტარის გარეთ) $\mathbf{E}$. თუ ასევე დავუშვებთ, რომ a მანძილზე ველი საგრძნობლად არ იცვლება, მაშინ მივიღებთ, რომ ეს ინტეგრალი ტოლია $\pi a^2 \mathbf{E}_n(\mathbf{x})$, სადაც $\mathbf{x}$ წერტილი გამტარის ზედაპირის გარეთაა და ინდექსი n აღნიშნავს გარე ნორმალის გასწვრივ ველის მდგენელს.

რაც შეეხება მოცულობითი ინტეგრალს გაუსის კანონში ტოლობის მარჯვენა მხრიდან, საჭიროა მოცულობითი მუხტის სიმკვრივე დავაკავშიროთ მუხტის ზედაპირულ სიმკვრივესთან. ვინაიდან მუხტი გვაქვს მხოლოდ გამტარის ზედაპირზე, თუ შემოვიტანთ ზედაპირიდან ნორმალის გასწვრივ გარე მიმართულებით მანძილის ფუნქციას $\zeta(\mathbf{x})$, მაშინ ამ ფუნქციის და დელტა ფუნქციის საშუალებით შეგვიძლია დავაკავშიროთ $\rho(\mathbf{x})$ და $\sigma(\mathbf{x})$. ამასთან $h \ll a$ დაშვებიდან გამომდინარეობს რომ ამ მოცულობითი ინტეგრალში, უფრო სწორედ მუხტის მოცულობითი სიმკვრივეში წვლილი შეაქვს მხოლოდ ზედაპირულ მუხტს. მაშინ მოცულობითი მუხტის სიმკვრივისათვის გვექნება:

$$\rho(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})\delta(\zeta(\mathbf{x})) \quad (2.71)$$

სადაც, როგორც აღნიშნეთ ζ არის მანძილი $\mathbf{x}$ წერილიდან გამტარის ზედაპირამდე. მოცულობითი ინტეგრალში გვექნება ინტეგრება ფართობზე და ინტეგრება ცილინდრის სიმაღლის გასწვრივ $\int_V dV \rho(\mathbf{x}) = \int d\zeta \int_S ds \sigma(\mathbf{x})\delta(\zeta(x))$, სადაც, დელტა ფუნქციის გამო დაგვრჩება მხოლოდ ზედაპირული ინტეგრალი. თუ დავუშვებთ რომ ზედაპირული სიმკვრივე არ იცვლება ამ მცირე ფართობში მაშინ ინტეგრალი იქნება უბრალოდ წრეწირის ფართობის პროპორციული πa^2 . მარჯვენა მხარე ტოლი ყოფილა $\pi a^2(\sigma(\mathbf{x}))/\epsilon_0$. ანუ გავქვს:

$$\int_V dV \nabla \cdot \mathbf{E} = \int_S ds \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E}_n(\mathbf{x}) \pi a^2 = \int_V dV \rho(\mathbf{x}) / \epsilon_0 = \pi a^2 \sigma(\mathbf{x}) / \epsilon_0 \quad (2.72)$$

საიდანაც მივიღებთ რომ

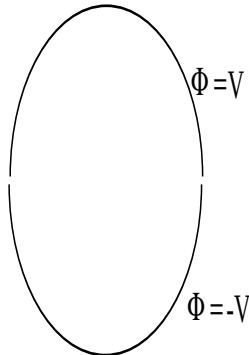
$$\mathbf{E}_n(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) / \epsilon_0 \quad (2.73)$$

ასევე შეგვიძლია ვიპოვნოთ სასაზღვრო პირობა მხები მდგენელისათვის. განვიხილოთ წირითი ინტეგრალი $d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x})$ მართკუთხა შეკრული წირის გასწვრივ.

$$\int_S ds (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = \oint_C d\mathbf{l} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}_t h = 0 \implies \mathbf{E}_t = 0 \quad (2.74)$$

ვუშვებთ, რომ მართკუთხედის სიგანე w ნაკლებია h სიმაღლეზე. ამ ინტეგრალში (რომელიც ნულია) ძირითადი წვლილი შეაქვს მართკუთხედის მხარეებს, რომლებიც ზედაპირის პარალელურია. მეორე მხრივ, $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ველი გამტარში ნულია. ანუ გვაქვს ინტეგრალი მხოლოდ გამტარი ზედაპირის გარე მხარეს. ვინაიდან ინტეგრალი ნულია ეს ნიშნავს, რომ $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ველის ტანგენციალური მდგენელი $\mathbf{E}_t(\mathbf{x})$, ასევე ნული უნდა იყოს

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{გამტარის ზედაპირზე.} \quad (2.75)$$



სურ 2.2: მხები მდგენელი

§17.2 გამტარის ზედაპირზე მოქმედი ძალა

წარმოვიდგინოთ, რომ გამტარის dA ფართის ელემენტში მოთავსებული მუხტი გადაგვაქვს dx მანძილზე გამტარის ზედაპირის ნორმალის გასწვრივ. ეს ვირტუალური გადაადგილება მოიცავს $dA dx$ მოცულობას. ამ მოცულობაში, პირველ მიახლოებაში^④ ელექტრული ველი იქნება ნული. სხვაგან კი არ შეიცვლება. ამგვარად

^④მიახლოება მით უფრო კარგია როცა ფარდობა $dx / \sqrt{A}$ მისწრაფვის ნულისკენ

ადგილი ექნება ველის ენერგიის ცვლილებას:

$$dW = -dAdx \frac{\epsilon_0}{2} E_n^2 = -\frac{1}{2} \sigma^2 dAdx + \mathcal{O}(dAd^2x, d^2Adx) \quad (2.76)$$

ენერგიის შენახვის კანონიდან გამომდინარე შესრულებული მუშაობა ტოლია dW . მეორე მხრივ კი ეს მუშაობა ტოლია dx ნამრავლისა ელექტრულ ძალაზე (მინუს ნიშნით), რომელიც მოქმედება dA ფართის ელემენტზე. ამრიგად,

$$-Fdx = dW \text{ ან } F = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 dA. \quad (2.77)$$

ამრიგად ფართის ერთეულზე მოქმედი ძალა (ანუ წნევა) ტოლი ყოფილა $\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2$; და მიმართულია გამტარის ზედაპირიდან გარეთ ნორმალის გასწვრივ ("უარყოფითი წნევა").

იგივე ამოცანას შეგვიძლია შევხედოთ სხვა კუთხით. ძალა ტოლი უნდა იყოს dA ფართში მოთავსებულ მუხტზე, ანუ σdA , ელექტრული ველის ნამრავლისა რომელიც მოქმედებს ამ მუხტზე. ანუ ესაა ელექტრული ველი შექმნილი დანარჩენი ზედაპირის მხრიდან ამ მცირე არეში, როცა მასში არაა მუხტი. ეს ველი კი ტოლია $\frac{1}{2\epsilon_0} \sigma$ (რატომ?).

§17.3 გამტარები ელექტრულ ველში

განვიხილოთ კერძო შემთხვევა, როცა სისტემა შედგება ერთმანეთისგან იზოლირებული n რაოდენობის გამტარისგან. სტატიკურ შემთხვევაში გამტარის შიგნით ველი არ გვაქვს, ვინაიდან გამტარი შედგება თავისუფალი მუხტებისგან და ველის არსებობის შემთხვევაში მუხტები დაიწყებდნენ მოძრაობას ანუ დაირღვეოდა სტატიკა. sing გან. (??) გვაძლევს რომ ასეთი სისტემისათვის

$$W = \frac{1}{2} \int dV \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i \quad (2.78)$$

სადაც Q_i და V_i i -ე გამტარზე არსებული მუხტი და პოტენციალია. ვინაიდან პოტენციალი მუხტის წრფივი ფუნქციაა (სუპერპოზიციის პრინციპი), გვექნება

$$V_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} Q_j. \quad (2.79)$$

p_{ij} პოტენციალური კოეფიციენტები ეწოდებათ. ეს კოეფიციენტები მუხტებისგან დამოკიდებულია და დამოკიდებულია მხოლოდ გამტართა ფორმაზე და ურთიერთ მდებარეობაზე. რომ დავრწმუნდეთ V_i სამართლიანობაში ამოცანას შევხედოთ ასე: ყოველ გამტარზე არსებულ წარმოქმნილ პოტენციალი შედგება Q_j მუხტის მქონე

j^{th} გამტარის მიერ შექმნილი პოტენციალებისგან როცა სხვა დანარჩენ გამტარებზე მუხტი ნულია. მაშინ ამ პოტენციალთა ჯამი გვაძლევს V_i . გან. (??) განტოლების შებრუნებული განტოლება გამოსახავს Q_i როგორც V_j პოტენციალების წრფივ კომბინაციას,

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j. \quad (2.80)$$

C_{ij} კოეფიციენტებს *ტევადობის კოეფიციენტები* ეწოდებათ; C_{ii} დიაგონალურ წევრების *ტევადობები* არა დიაგონალურ წევრებს *ელექტროსტატიკური ინდუქციის კოეფიციენტები*. ცალკეული გამტარის ინდუქტივობა C_{ii} , რაც ტოლია ერთეულოვან პოტენციალის მქონე გამტარზე გამტარზე არსებული სრული მუხტისა, როცა სხვა გამტარებზე პოტენციალი ნულია.

მაგალითად თუ გვაქვს ორი გამტარი ტოლი და საპირისპირო ნიშნის მქონე მუხტებით ტევადობა განიმარტება როგორც ერთერთ გამტარზე არსებული მუხტის ფარდობა ამ ორ გამტარს შორის არსებულ პოტენციალთა სხვაობასთან, როცა ყველა სხვა გამტარზე პოტენციალი ნულია.

$$\begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} C_{22} & -C_{21} \\ -C_{12} & C_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} \quad (2.82)$$

ტევადობა $C(1,2) = Q/|V_1 - V_2|$ კი იქნება

$$C(1,2) = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)/(C_{11} + C_{22} + 2C_{12}). \quad (2.83)$$

გამტარების სისტემის ენერგია შეიძლება ჩავწეროთ პოტენციალებით და C_{ij} კოეფიციენტების საშუალებით

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_{ij} V_i V_j. \quad (2.84)$$

§18 პოტენციალი და გრინის ფუნქცია

ხშირ შემთხვევაში ჩვენ ვიცით მუხტის განაწილება $\rho(\mathbf{x})$ რაღაც სასრულ მოცულობაში V (ან სასრულ ზედაპირზე S ან წირზე l) და საპოვნელია პოტენციალი სივრცის ნებისმიერ წერტილში. მეორე ტიპის ამოცანაა: ვიცით $\phi(\mathbf{x})$ სასრულ არეში და უნდა ვიპოვნოთ პოტენციალი მთელ სივრცეში. ამ ამოცანების ამოსახსნელად ერთერთი მეთოდია გრინის ფუნქციათა მეთოდი თავისუფალ სივრცეში გრინის ფუნქციაა

$$G_{free}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (2.85)$$

შესაბამისი პოტენციალით

$$\Phi(\mathbf{x}) = k \int_V dV' G_{free}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}'). \quad (2.86)$$

$G_{free}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ წარმოადგენს პოტენციალს $\mathbf{x}$ წერტილში, ერთეულოვანი წერტილოვანი მუხტისათვის $\mathbf{x}'$ წერტილში. როცა გვაქვს მუხტის განაწილება $\rho(\mathbf{x})$ ვლუბულობოთ ზემოთ მოყვანილ ინტეგრალს.

§18.1 გრინის თეორემა

გავისხენოთ დივერგენციის თეორემა $\mathbf{A}$ ვექტორული ველისათვის:

$$\int_V dV [\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x})] = \int_S ds [\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}] \quad (2.87)$$

სადაც S V მოცულობის შემოღსაზღვრელი ზედაპირია. განვიხილოთ შემთხვევა როცა $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) \nabla \psi(\mathbf{x})$; სადაც $\phi(\mathbf{x})$ და $\nabla \psi(\mathbf{x})$ ნებისმიერი ფუნქციებია. მაშინ გვექნება:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) \quad (2.88)$$

და

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}) [\mathbf{n} \cdot \nabla \psi(\mathbf{x})] = \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n} \quad (2.89)$$

სადაც $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ არის ψ ფუნქციის წარმოებული ზედაპირიდან გარეთ მიმართული ნორმალის გასწვრივ. დივერგენციის თეორემაში ჩასმა მოგვცემს

$$\int_V dV [\nabla \phi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \psi(\mathbf{x})] = \int_S ds \phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n} \quad (2.90)$$

რაც ცნობილია გრინის პირველი იგივეობის სახელწოდებით. შევუცვალოთ $\psi(\mathbf{x})$ და $\phi(\mathbf{x})$ ადგილებში. მაშინ $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}) \nabla \phi(\mathbf{x})$ და გვექნება

$$\int_V dV [\nabla \psi(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}) \nabla^2 \phi(\mathbf{x})] = \int_S ds \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial n}. \quad (2.91)$$

გამოვაკლოთ ზედა იგივეობა ამ შედეგს და მივიღებთ

$$\int_V dV [\phi(\mathbf{x}) \nabla^2 \psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}) \nabla^2 \phi(\mathbf{x})] = \int_S ds \left[\phi(\mathbf{x}) \frac{\partial \psi(\mathbf{x})}{\partial n} - \psi(\mathbf{x}) \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial n} \right]$$

რაც წარმოადგენს გრინის მეორე იგივეობას, რაც ცნობილია ასევე გრინის თეორემის სახელით.

§18.2 გრინის თეორემის გამოყენება

x62

ავიღოთ ფუნქციები ქვემოთ მოყვანილი წესით და საინტეგრაციო ცვლადად ავიღოთ $\mathbf{x}'$:

$$\phi(\mathbf{x}') = \Phi(\mathbf{x}') \text{ და } \psi(\mathbf{x}') = 1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \equiv 1/R. \quad (2.92)$$

მეორე ფუნქციაში, $\mathbf{x}$ არის წერტილი სადაც ვეძებთ პოტენციალს გრინის თეორემაში ჩასმა მოგვცემს:

$$\begin{aligned} \int_V dV' [\Phi(\mathbf{x}') \nabla'^2 (1/R) - (1/R) \nabla'^2 \Phi(\mathbf{x}')] &= \\ &= \int_S ds' \left[\Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial(1/R)}{\partial n'} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right] \end{aligned} \quad (2.93)$$

ანუ

$$-4\pi\Phi(\mathbf{x}) + 4\pi k \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \int_S ds' \left[\Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial(1/R)}{\partial n'} - \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} \right]$$

სადაც დავუშვიტ რომ $\mathbf{x}$ მდებარეობს V შიგნით. ცვლადების გადალაგებით გვექნება

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_S ds' \left[\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial(1/R)}{\partial n'} \right] \end{aligned} \quad (2.94)$$

„პირველი“ წევრი „წარმოადგენს“ მოცულობით ინტეგრალს მუხტის სიმკვრივით, „ზედაპირზე“ მაგრამ არა მთელ სივრცეში. $\Phi(\mathbf{x})$ პოტენციალში წილი შეაქვს ზედაპირულ მუხტებსაც რაც აღიწერება მეორე წევრით. აღსანიშნავია რომ თუ $\mathbf{x}$ წერტილი მოცულობის გარეთაა, მაშინ მარცხენა მხარე ნულია. თუ V წარმოადგენს მთელ სივრცეს და S არის უსასრულობაში მაშინ შესაბამისი ზედაპირული წევრი ნულია და გვრჩება მხოლოდ მოცულობითი წევრი მთელ სივრცეში. ასევე თუ $\rho(\mathbf{x}') = 0$ ყოველი $\mathbf{x}'$ — თვის V მოცულობაში, მაშინ პოტენციალი განისაზღვრება ზედაპირული ინტეგრალით და Φ -ის წარმოებულით ნორმალის გასწვრივ.

§18.3 გრინის თეორემა და სასაზღვრო პირობები

გვაქვს ორი ტიპის ამოცანა ვიციტ მუხტის მოცულობითი განაწილება და საძიებელია $\Phi(\mathbf{x})$. ან ვიციტ $\Phi(\mathbf{x}')$ ან $\partial\Phi(\mathbf{x}')/\partial n'$ S ზედაპირზე. არაა აუცილებელი ვიცოდეთ სამივე სიდიდე ზედაპირზე. როცა მოცემულია Φ საზღვარზე ამბობენ რომ გვაქვს ამოცანა *დირიხლეს სასაზღვრო პირობით*; როცა მოცემულია Φ წარმოებული საზღვარზე ნორმალის გასწვრივ მაშინ გვაქვს *ნეიმანის სასაზღვრო პირობა*. შესაძლებელია ასევე ერთ ნაწილზე გვქონდეს დირიხლეს ხოლო მეორეზე ნეიმანის პირობა – *შერეული სასაზღვრო პირობა*.

მოცემულია	სასაზღვრო პირობა
$\Phi(\mathbf{x}')$ მოცემულია S ზე	დირიხლე
$\partial\Phi(\mathbf{x}')/\partial n'$ მოცემულია S ზე	ნეიმანი
$\Phi(\mathbf{x}')$ მოცემულია S ერთ ნაწილზე $\partial\Phi(\mathbf{x}')/\partial n'$ დანარჩენ ნაწილზე	შერეული

§18.4 ამონახსნის ერთადერთობა და სასაზღვრო პირობები

ვაჩვენოთ რომ $\Phi(\mathbf{x}')$ ან მისი წარმოებულის ცოდნა S ზედაპირზე ნორმალის გასწვრივ საკმარისია პუასონის განტოლების

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{x}) = -\rho(\mathbf{x})/\epsilon_0 \quad (2.95)$$

ამონახსნის საპოვნელად და ეს ამონახსნი ერთადერთია. ვთქვათ მოცემულია მუხტის სიმკვრივე S ზედაპირით შემოსაზღვრულ V მოცულობაში. მნიშვნელობა არ აქვს რა სასაზღვრო პირობაა მოცემული, დავუშვათ რომ გვაქვს ორი განსხვავებული ამონახსნი Φ_1 და Φ_2 . განვიხილოთ $U = \Phi_1 - \Phi_2$. ეს ფუნქცია

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}) = 0 \quad V \text{ შიგნით} \quad (2.96)$$

და

$$\begin{aligned} \text{ან } U(\mathbf{x}) &= 0, & \text{როცა } \mathbf{x} \in S \text{ (დირიხლე)} \\ \text{ან } \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n} &= 0, & \text{როცა } \mathbf{x} \in S \text{ (ნეიმანი)}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

გრინის პირველ იგივეობაში (2.90), დავუშვათ $\psi = \phi = U$. მაშინ:

$$\int_V dV [U(\mathbf{x})\nabla^2 U(\mathbf{x}) + \nabla U(\mathbf{x}) \cdot \nabla U(\mathbf{x})] = \int_S ds U(\mathbf{x}) \frac{\partial U(\mathbf{x})}{\partial n}. \quad (2.98)$$

ვინაიდან U აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას პირველი წევრი ფრჩხილებში ნულია. სასაზღვრო პირობიდან (ნეიმანის ან დირიხლეს) გამომდინარეობს რომ მარჯვენა მხარეც ნულია. ანუ გვრჩება მხოლოდ

$$\int_V dV |\nabla U(\mathbf{x})|^2 = 0 \quad (2.99)$$

საიდანაც $\nabla U(\mathbf{x}) = 0$ V მოცულობაში. ამგვარად $U(\mathbf{x})$ მუდმივია V მოცულობაში და ორი ამონახსნი Φ_1 და Φ_2 განსხვავდებიან მხოლოდ მუდმივით. დირიხლეს სასაზღვრო პირობისთვის ეს მუდმივა ნულია ვინაიდან ორივე ფუნქცია ერთი და იგივეა საზღვარზე. ნეიმანის სასაზღვრო პირობისთვის კი ეს მუდმივა ნებისმიერი, რაც ნიშნავს რომ გვაქვს თავისუფლება ავირჩიოთ ნულოვანი პოტენციალი.

ეს დამტკიცება ასევე სამართლიანია შერეული სასაზღვრო პირობის შემთხვევაში, ვინაიდან ამ შემთხვევაშიც ნულდება ზედაპირული ინტეგრალი. არაა აუცილებელი ორივე $\Phi(\mathbf{x})$ ან $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ მოცემული იყოს ყველგან S ზედაპირზე (კომის სასაზღვრო პირობა); ერთი პირობა საკმარისია ერთადერთი ამონახსნის საპოვნელად. უფრო მეტიც, არ არსებობს ამოხსნა როცა ორივე პირობა ერთდროულად ედება საზღვარზე.

§18.5 გრინის ფუნქცია და სასაზღვრო პირობები

პუასონის და ლაპლასის განტოლების ამოხსნა შეიძლება ვიპოვნოთ გრინის თეორემის გან. (2.92) და გრინის ფუნქციის საშუალებით. გან. (2.94) განტოლების გამოყენებისას ($\Phi(\mathbf{x})$ განტოლებაში არაა ამოხსნა არამედ ეს ტოლობა წარმოადგენს ინტეგრალურ განტოლებას) $\psi(\mathbf{x}')$ ფუნქციად აღებული გვქონდა $1/|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას გან. (2.51):

$$\nabla'^2 \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$$

და წარმოადგენს წერტილოვანი მუხტის გრინის ფუნქციას. ეს ფუნქცია არაა ერთადერთი არამედ განსაზღვრულია ისეთი ადიტიური ფუნქციის სიზუსტით რომელიც აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას. ანუ გვაქვს

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (2.100)$$

სადაც $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\nabla'^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \quad (2.101)$$

$\mathbf{x}$ და $\mathbf{x}' \in V$. $\psi(\mathbf{x}')$ ფუნქციად თუ ავიღებთ ასეთი წესით განმარტებულ გრინის ფუნქციას გვექნება

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_S ds' \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} - \Phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right] \end{aligned} \quad (2.102)$$

ეხლა ამოცანა დაიყვანება ისეთ გრინის ფუნქციის პოვნაზე რომლისთვისაც მოცემული სასაზღვრო პირობისათვის გან. (??) განტოლებაში ზედაპირულ ინტეგრალში დაგვრჩება ან მხოლოდ პოტენციალი ზედაპირზე ან მხოლოდ პოტენციალის წარმოებული ნორმალის გასწვრივ.

გრინის თეორემა დირიხლეს სასაზღვრო პირობით

ამ შემთხვევაში ვეძებთ ისეთ გრინის G_D ფუნქციას რომელიც ზედაპირზე ტოლია ნულისა. მაშინ პოტენციალის წარმოებული წევრი ზედაპირულ ინტეგრალში აღარ გვექნება:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') - \frac{1}{4\pi} \int_S ds' \frac{\partial G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \Phi(\mathbf{x}')$$

ამ განტოლებაში $\Phi(\mathbf{x}')$ მოცემული გვაქვს S-ზე. ასევე ცნობილია მუხტის განაწილება მოცულობაში. ასე რომ ტოლობა უკვე წარმოადგენს არა ინტეგრალურ განტოლებას არამედ პუასონის განტოლების ამოხსნას. ანუ პოტენციალის პოვნის ამოცანა შეიცვალა გრინის ფუნქციის პოვნის ამოცანით: არსებობს თუ არა ისეთი $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ რომლისთვისაც

$$\nabla^2 G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'); \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V \quad (2.103)$$

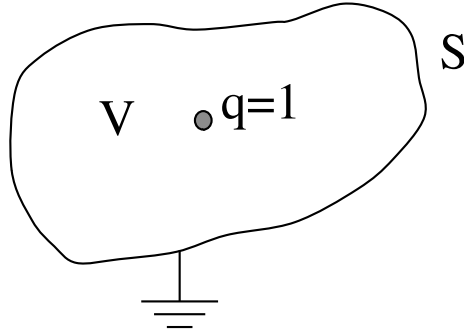
და

$$G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')|_{\mathbf{x}' \in S} = 0? \quad (2.104)$$

პასუხი დადებითია. ასეთი $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ არსებობს და ის ერთადერთია. ეს ფუნქცია წარმოადგენს შემდეგი ამოცანის ამოხსნას:

ვიცით, რომ პოტენციალი თავისუფალი V მოცულობის შემოღობულ ზედაპირზე ნულია (ამით ზედაპირული ინტეგრალი იგივეურად ნულია). ამ მოცულობაში იმყოფება ერთეულოვანი წერტილოვანი მუხტი $\mathbf{x}'$ წერტილში. იხ. სურ 2.3 ($\rho(\mathbf{x}')$ გადაიქცევა დელტა ფუნქციად).

აღსანიშნავია რომ დირიხლეს ამოცანისთვის $G_D(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ სიმეტრიულია $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ ცვლადების მიმართ. ასევე დამოკიდებულია გეომეტრიაზე.



სურ 2.3: დირიხლეს ამოცანა

§18.6 გრინის თეორემა და ნეიმანის სასაზღვრო პირობა.

ერთი შეხედვით ნეიმანის სასაზღვრო პირობისათვის G შეგვიძლია დავადოთ პირობა $\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') / \partial n' = 0$ როცა $\mathbf{x}' \in S$. მაშინ გრინის თეორემის გამოყენება მოგვცემს

$$\Phi(\mathbf{x}) = Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') + \frac{1}{4\pi} \int_S ds' \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \quad (2.105)$$

მაგრამ ასეთი G ფუნქცია არ არსებობს. მართლაც, თუ გამოვიყენებთ გაუსის თეორემას

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S ds' \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} = \\ &= \int_S ds' [\mathbf{n}' \cdot \nabla' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')] = \int_V dV' \nabla'^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -4\pi \end{aligned} \quad (2.106)$$

ანუ შეუძლებელია G ჰქონდეს ნულის ტოლი წარმოებული ნორმალის გასწვრივ ყველგან S ზედაპირზე. ამიტომ საჭიროა დავადოთ სხვა პირობა. უმარტივესი პირობა კი იქნება:

$$\left. \frac{\partial G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right|_{\mathbf{x}' \in S} = -\frac{4\pi}{S} \quad (2.107)$$

სადაც S ზედაპირის ფართობია. ასეთი გრინის ფუნქციისათვის გრინის თეორემა-დან გვექნება:

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{x}) = & \langle \Phi \rangle_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V dV' G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \rho(\mathbf{x}') + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_S ds' \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}')}{\partial n'} G_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\end{aligned}$$

სადაც $\langle \Phi \rangle_S$ არის საშუალო პოტენციალი S ზედაპირზე,

$$\langle \Phi \rangle_S \equiv \frac{1}{S} \int_S ds' \Phi(\mathbf{x}') \quad (2.108)$$

ეს ნიშნავს რომ ამოცანა ნეიმანის სასაზღვრო პირობით შეიძლება ამოხსნილ იქნას რაღაც მუდმივის სიზუსტით, რაც ნიშნავს, რომ გვაქვს თავისუფლება ავირჩიოთ ნულოვანი პოტენციალის მქონე ზედაპირი.

ელექტროსტატიკის ამოცანების ამოხსნის მეთოდები

§19	გამოსახულების მეთოდი	44
§20	მაგალითი: წერტილოვანი მუხტი და უსასრულო დამიწებული სიბრტყე . .	45
§21	ამოცანა: წერტილოვანი მუხტი რამდენიმე გამტარ სიბრტყეს შორის . . .	47
§22	მაგალითი: წერტილოვანი მუხტი დამიწებული გამტარი სფეროს შიგნით .	47

ამ თავში განხილული იქნება ელექტროსტატიკური ამოცანების ამოხსნის მეთოდები. კერძოდ, გამოსახულების მეთოდი, გრინის ფუნქციათა მეთოდი, ცვლადთა განცალკეება და ორთოგონალურ ფუნქციებად გაშლის მეთოდები.

§19 გამოსახულების მეთოდი

მარტივი გეომეტრიის შემთხვევაში პოტენციალის, ველის, გრინის ფუნქციის საპოვნელად მოსახერხებელია გამოსახულების მეთოდი. ვთქვათ მოცემული გვაქვს ლაპლასის (ან პუასონის) განტოლება რაღაც სასაზღვრო პირობით. თუ ამ ამოცანას შევცვლით მეორე, სხვა ამოცანით ისეთით რომ კვლავ სრულდება სასაზღვრო პირობები და მიღებული პასუხი აკმაყოფილებს ლაპლასის (ან პუასონის) განტოლებას, მაშინ ამოხსნის ერთადერთობიდან გამომდინარე ეს ყოფილა პირველი ამოცანის ამონახსნი.

ეს მეთოდი ასევე საშუალებას იძლევა ვიპოვნოთ გრინის ფუნქცია მარტივი (რას ვგულისხმობთ ამ სიტყვაში ქვემოთ მოყვანილ ამოცანებში გახდება ცხადი) გეომეტრიის შემთხვევაში. განვიხილავთ მხოლოდ გამტარ (ეკვიპოტენციალური)

ელექტრულად იზოლირებულ შემომსაზღვრელ ზედაპირებს სასაზღვრო პირობით $\Phi(\mathbf{x}) = \text{const}$ ამ ზედაპირზე.

გავიხსენოთ ელექტროსტატიკური ამოცანა: გვაქვს სასრული V მოცულობა რომელშიც მოცემულია მუხტის განაწილება და მოცემულია პოტენციალი მის შემომსაზღვრელი S ზედაპირზე. ამოცანაა ვიპოვნოთ პოტენციალი (ველის დაძაბულობა) სივრცეში. გამოსახულების მეთოდი მდგომარეობს შემდეგში, რომ ეს პოტენციალი (ველი) იქნება იგივე V ში თუ სადმე V გარეთ მოცემული იქნება ისეთი მუხტის განაწილება, რომელიც შემომსაზღვრელ S ზედაპირზე უზრუნველყოფს პირველადი ამოცანის სასაზღვრო პირობაში მოცემული პოტენციალის არსებობას.

ანუ გვაქვს ორი განსხვავებული ამოცანა. ერთი "რეალური" რომელშიც ფიგურირებს რეალური მუხტის განაწილება და სასაზღვრო პირობა და "ფიქტიური" რომელშიც ფიგურირებს რაღაც "ფიქტიური" მუხტის განაწილება, სადაც სხვაგან V გარეთ და ისეთი რომ საზღვარზე პოტენციალი აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას. ამ მეორე ამოცანით მიღებული ამონახსენი ძალაშია V მოცულობისათვის ანუ იმ არისთვის სადაც გვაქვს "რეალური" მუხტების განაწილება, მაგრამ არა სხვაგან ანუ V გარეთ.

ვთქვათ რაღაც წესით ვიპოვნეთ ასეთი "ფიქტიური" მუხტების (ასეთ მუხტებს გამოსახულება მუხტებს უწოდებენ) განაწილება მაშინ პოტენციალი მოიცემა კულონის კანონით:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho_2(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (3.1)$$

სადაც ρ_2 სრული მუხტის სიმკვრივა მეორე ამოცანაში (ანუ რეალური და გამოსახულება მუხტების სიმკვრივეთა ჯამი).

როგორ მუშაობს გამოსახულების მეთოდი ამას განვიხილავთ ქვემოთ მოყვანილ მაგალითებში.

§20 მაგალითი: წერტილოვანი მუხტი და უსასრულო დამიწვადი სიბრტყე

ვთქვათ, მოცემულია წერტილოვანი მუხტი q წერტილში კოორდინატებით დეკარტის საკოორდინატო სისტემაში $\mathbf{x}_0 = (0, 0, a)$ ასევე გვაქვს დამიწვადი უსასრულო გამტარს უჭირავს $z < 0$ სივრცე, ანუ გვაქვს დირიხლეს ამოცანა $z = 0$ სიბრტყეზე სადაც $\Phi(x, y, 0) = 0$. ასევე, $\Phi(\mathbf{x}) \rightarrow 0$ როცა $r \rightarrow \infty$. ამოცანაა ვიპოვნოთ პოტენციალი $z > 0$ არეში. გამოსახულების მეთოდით ამ ამოცანის ამოხსნა ნიშნავს, სადაც $z < 0$ ნახევარსივრცეში უნდა მოვათავსოთ მუხტი (ან მუხტები) ისეთი და ისეთ ადგილას რომ ამ და $\mathbf{x}_0$ -ში არსებული რეალური მუხტის მიერ შექმნილი პოტენციალი გვაძლევდეს ნულოვან პოტენციალს $z = 0$ სიბრტყეზე. ადვილი მისახვედრია რომ ამისათვის გამოსახულება მუხტს უნდა ჰქონდეს საპირისპირო ნიშანი ანუ უნდა

იყოს $-q$, ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე გამოსახულება მუხტი უნდა მდებარეობდეს სიმეტრიულად რეალური მუხტის მიმართ სიბრტყის მეორე მხარეს ანუ $\mathbf{x}'_0 = (0, 0, -a)$ წერტილში.

ამგვარად

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0|} \right] \quad (3.2)$$

ეს ფუნქცია მართლაც აკმაყოფილებს პუასონის განტოლებას $z > 0$ არეში და აკმაყოფილებს ამოცანის სასაზღვრო პირობას $z = 0$ სიბრტყეზე. ამოხსნის ერთადერთობიდან გამომდინარე (3.2) ყოფილა ჩვენს მიერ დასმული ამოცანის ამონახსენი. აღსანიშნავია რომ ეს ფუნქცია არაა ამონახსენი, როცა $z < 0$; ამ შემთხვევაში პოტენციალი ნულია ვინაიდან სივრცის ეს ნაწილი წარმოადგენს გამტარს.

რეალურ სისტემებში არსებობს მუხტის ზედაპირული სიმკვრივე $\sigma(x, y)$ გამტარის ზედაპირზე. მის საპოვნელად საჭიროა ელექტრული ველის ნორმალური კომპონენტის პოვნა ზედაპირზე:

$$E_n(x, y, 0) = - \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qa}{(\rho^2 + a^2)^{3/2}} \quad (3.3)$$

სადაც $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. ზედაპირული მუხტის სიმკვრივეს ვიპოვნით გამტარი—ჰაერი სასაზღვრო პირობიდან $E_n = \sigma/\epsilon_0$.

ამ მაგალითიდან ჩანს თუ რას ნიშნავს ტერმინი "გამოსახულების მეთოდი". "მუხტი გამოსახულება"— ესაა რეალური მუხტის სარკული ანარეკლი $z = 0$ სიბრტყის მიმართ და ზოგადად გამტარი კედლის მიმართ. საინტერესოა რომ თუ გვაქვს სფერული სიმეტრია მაშინ მხოლოდ ერთი მუხტი გამოსახულება საკმარისია ამოცანის ამოსახსნელად. არის შემთხვევები როცა გამოსახულება მუხტების უსასრულო რაოდენობაა საჭირო. წერტილოვანი მუხტის შემთხვევაში პოტენციალთან ერთად მიიღება გრინის ფუნქციაც. მაგალითად ჩვენს მიერ სიბრტყე — ერთეულოვანი წერტილოვანი მუხტი დირიხლეს ამოცანისთვის $z > 0$ ნახევარსივრცისთვის გრინის ფუნქცია იქნება.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|} \right) \quad (3.4)$$

სადაც $\mathbf{x}'_i$ წარმოადგენს $\mathbf{x}'$ სარკულ გამოსახულებას $z = 0$ სიბრტყის მიმართ. ასევე q მუხტი სკალირებულია $4\pi\epsilon_0$ რომ გრინის ფუნქცია აკმაყოფილებდეს (2.51) განტოლებას (იხ. გვ. 28). ამგვარად, ჩვენ შეგვიძლია ამოვხსნათ პოტენციალის ამოცანა ნებისმიერი $\rho(\mathbf{x})$ განაწილებისათვის $z > 0$ არეში და ნებისმიერი პოტენციალისათვის $\Phi(x, y, 0)$ საზღვარზე $z = 0$.

მუხტი	კუთხე
$-Q$	$\frac{2\pi}{3} - \phi$
$+Q$	$\frac{2\pi}{3} + \phi$
$-Q$	$-\frac{2\pi}{3} - \phi$
$+Q$	$-\frac{2\pi}{3} + \phi$
$-Q$	$-\phi$

ცხრილი 3.1: გამოსახულების მეთოდი. მუხტი გამტარ სიბრტყეებს შორის

§21 ამოცანა: წერტილოვანი მუხტი რამდენიმე გამტარ სიბრტყეს შორის

ზემოთ მოცვანილი ამოცანის განზოგადება იქნება წერტილოვანი მუხტი გადამკვეთ გამტარ სიბრტყეებს შორის. განვიხილოთ ორი გამტარი სიბრტყე რომელიც იკვეთება 60° კუთხით. გადაკვეთის წერტილის მიმართ (ρ, ϕ, z) წერტილში მოთავსებულია წერტილოვანი მუხტი Q .

ამ ამოცანის ამოსახსნელად უნდა მოგათავსოთ გამოსახულება მუხტები ისე რომ დაკმაყოფილდეს სასაზღვრო პირობა. ამისათვის საჭიროა ხუთი გამოსახულება მუხტი როგორც ეს აღნიშნულია ზემოთ სურ. ?? მათ აქვთ იგივე ρ და z კოორდინატი რაც აქვს რეალური მუხტს, (2.51) 28 ხოლო აზიმუტალური კუთხეები მოცემულია ცხრილში 3.1.

დავალება

გამოთვალეთ E , Φ , σ

§22 მაგალითი: წერტილოვანი მუხტი დამიწებული გამტარი სფეროს შიგნით

განვიხილოთ წერტილოვანი q მუხტი გამტარი a რადიუსის მქონე სფეროს შიგნით. საპოვნელია ველი სფეროს შიგნით და მუხტის განაწილება სფეროს ზედაპირზე (ვთვლით რომ სფეროს ზედაპირის სისქე უსასრულოდ მცირეა) სფეროს ცენტრი მოთავსებულია საკოორდინატო სისტემის სათავეში. სფეროს ცენტრსა და მუხტს შორის მანძილი ავლნიშნოთ r_0 . ანუ მუხტის კოორდინატია $\mathbf{x}_0 = r_0 \mathbf{n}_0$, სადაც $\mathbf{n}_0$ ერთეულოვანი ვექტორია ცენტრიდან მუხტის მიმართულებით.

ესლა ამოცანაა შემოვიტანოთ ისეთი გამოსახულება q' მუხტი (ვნახავთ რომ ერთი მუხტი საკმარისი) რომელიც უზრუნველყოფს სასაზღვრო პირობას სფეროს

ზედაპირზე. ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე ასეთი მუხტი უნდა მდებარეობდეს სფეროს ცენტრის და სფეროს შიგნით არსებული მუხტის შემადგენელ წრფეზე. ვთქვათ ამ მუხტის კოორდინატებია $\mathbf{x}'_0 = r'_0 \mathbf{n}_0$.

ამ ორი მუხტის მიერ შექმნილი პოტენციალი იქნება

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{q'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0|} \quad (3.5)$$

ეხლა უნდა შევარჩიოთ q' და r'_0 ისე, რომ $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ როცა $\mathbf{x}$ არის სფეროს ზედაპირზე, ანუ $\mathbf{x} = a\mathbf{n}$, სადაც $\mathbf{n}$ ნებისმიერი ერთეულოვანი ვექტორია. ასეთ წერტილში პოტენციალი შეიძლება ჩავწეროთ ასე

$$\Phi(a\mathbf{n}) = \frac{q/a}{|\mathbf{n} - (r_0/a)\mathbf{n}_0|} + \frac{q'/r'_0}{|\mathbf{n}_0 - (a/r'_0)\mathbf{n}|}. \quad (3.6)$$

საიდანაც ჩანს, რომ მნიშვნელები ტოლია როცა $r_0/a = a/r'_0$, და მრიცხველები ტოლია როცა $q/a = -q'/r'_0$. (არის სხვა "ამონახსენი", როცა $r'_0 = r_0$ და $q' = -q$ მაგრამ ეს არაა ამონახსენი ვინაიდან ასეთი გამოსახულება მუხტი იქნება მოცულობის შიგნით და გააბათილებს ნამდვილ მუხტს. ჩვენ უნდა გვქონდეს $r'_0/a > 1$) ამგვარად ჩვენ შეგვიძლია Φ ნულის ტოლობას S საზღვარზე შეგვიძლია მივაღწიოთ როცა

$$r'_0 = a^2/r_0 \text{ და } q' = -q(a/r_0) \quad (3.7)$$

და მოცემული ამოცანისთვის პოტენციალს (სფეროზე ეკვიპოტენციალური ზედაპირით) ექნება სახე:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} - \frac{a/r_0}{|\mathbf{x} - (a^2/r_0^2)\mathbf{x}_0|} \right] \quad (3.8)$$

ეს ნიშნავს, რომ ვიციტ გრინის ფუნქციის სახეც a რადიუსის სფეროსთვის:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{a/r}{|\mathbf{x}' - (a^2/r^2)\mathbf{x}|}. \quad (3.9)$$

როცა მუხტი იმყოფება დამიწებული სფეროს გარეთ, ამოხსნა იგივეა ოღონდ რეალური და გამოსახულება მუხტი იცვლიან ადგილებს. მიღებული შედეგები $\Phi(\mathbf{x})$ და $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ სამართლიანია გარდა იმ შემთხვევისა როცა r , r_0 , და r' ყველა მეტია a -ზე.

ვიციტ რა პოტენციალი შეგვიძლია გავიგოთ მუხტის განაწილება სფეროს ზედაპირზე. $E(\mathbf{x})$ განმარტებიდან და სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარე იგი ტოლია

$$\sigma = -\epsilon_0 E_r = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (3.10)$$

z-მიმართით $\mathbf{n}_0$ გასწვრივ, მაშინ

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{1}{(r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta)^{1/2}} - \frac{(a/r_0)}{(r^2 + (a^4/r_0^2) - 2r(a^2/r_0) \cos \theta)^{1/2}} \right] \quad (3.11)$$

θ პოლარული კუთხეა z-დერძსა (რაც იგივეა $\mathbf{x}_0$ -სა) და $\mathbf{x}$ შორის. მაშინ ველის რადიალური კომპონენტი $r = a$ სფეროს ზედაპირზე ტოლია

$$\begin{aligned} E_r &= - \left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{x})}{\partial r} \right|_{r=a} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[-\frac{1}{2} \frac{2a - 2r \cos \theta}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \theta)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{a}{r_0} \frac{1}{2} \frac{2a - 2(a^2/r_0) \cos \theta}{(a^2 + (a^4/r_0^2) - 2(a^3/r_0) \cos \theta)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left[\frac{a - r_0 \cos \theta}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \theta)^{3/2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_0^2}{a^2} \frac{a - (a^2/r_0) \cos \theta}{(a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos \theta)^{3/2}} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a^2} \left[\frac{1 - r_0^2/a^2}{(1 + (r_0^2/a^2) - 2(r_0/a) \cos \theta)^{3/2}} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\delta = r_0/a$, მაშინ მუხტის ზედაპირული სიმკვრივე იქნება

$$\sigma = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{1 - \delta^2}{(1 + \delta^2 - 2\delta \cos \theta)^{3/2}} \quad (3.13)$$

სრული ზედაპირული მუხტი შეგვიძლია ვიპოვნოთ σ ზედაპირზე ინტეგრებით, მაგრამ გაცილებით ადვილია მისი გამოთვლა გაუსის კანონით; თუ ვაინტეგრებთ $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ ნორმალური კომპონენტს ჩაკეტილ ზედაპირზე რომელიც მოიცავს გამტარს მივიღებთ ნულს ვინაიდან ველი გამტარში ნულია.

$$0 = \int_S d\mathbf{s} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = Q/\epsilon_0 = \left(q + \int_S d\mathbf{s} \sigma \right) / \epsilon_0$$

რაც ნშნავს რომ ინდუცირებული მუხტი არის $-q$. მართლაც, ავიღოთ ზედაპირული ინტეგრალი მუხტის სიმკვრივით. გვექნება:

$$\begin{aligned}
 Q_i &= \int_S ds \sigma(\mathbf{x}) \\
 &= -\frac{q}{2}(1-\delta^2) \int_{-1}^1 \frac{du}{(1+\delta^2-2\delta u)^{3/2}} = \\
 &= -\frac{q}{2} \frac{1-\delta^2}{2\delta} \left[\frac{2}{(1+\delta^2-2\delta)^{1/2}} - \frac{2}{(1+\delta^2+2\delta)^{1/2}} \right] = \\
 &= -\frac{q}{2} \frac{1-\delta^2}{\delta} \left(\frac{1}{1-\delta} - \frac{1}{1+\delta} \right) = -q
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

აღსანიშნავია რომ, $|\sigma|$ აქვს მაქსიმუმი $\mathbf{n}_0$ გასწვრივ

$$|\sigma_{max}| = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{1+\delta}{(1-\delta)^2} \tag{3.15}$$

საპირისპირო მიმართულებით კი მინიმუმი:

$$|\sigma_{min}| = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{1-\delta}{(1+\delta)^2} \tag{3.16}$$

ასევე შეგვიძლია გამოვთვალოთ **მუხტზე მოქმედი სრული ძალა** ეს იგივეა რაც გამტარზე მოქმედი ძალა საპირისპირო ნიშნით. ზედაპირზე ფართის ერთეულზე მოქმედი ძალა იქნება $2\pi\sigma^2$ და მიმართულია ნორმალის გასწვრივ გამტარიდან სი-ცარიელისკენ სფერულის სიმეტრიის გამო, მხოლოდ $\mathbf{n}_0$ მიმართული კომპონენტა იქნება ნულისგან გასხვებული,

გვექნება

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{F}_n| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \sigma^2(\theta) \cos\theta \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi^2 a^2 q^2}{16\pi^2 a^4} (1-\delta^2)^2 \int_{-1}^1 \frac{udu}{(1+\delta^2-2\delta u)^3} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4} \frac{q^2}{a^2} (1-\delta^2)^2 \int_{-1}^1 \frac{udu}{(1+\delta^2-2\delta u)^3} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4} \frac{q^2}{a^2} (1-\delta^2)^2 \frac{1}{4\delta^2} \left[-\frac{1}{1+\delta^2-2\delta u} + \frac{1+\delta^2}{2(1+\delta^2-2\delta u)^2} \right]_{-1}^1 \quad (3.17) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4} \frac{q^2}{a^2} \frac{(1-\delta^2)^2}{4\delta^2} \left[\frac{-1}{(1-\delta)^2} + \frac{1}{(1+\delta)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1+\delta^2}{2(1-\delta)^4} - \frac{1+\delta^2}{2(1+\delta)^4} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \frac{(1-\delta^2)^2}{4\delta^2} \left[\frac{-4\delta}{(1-\delta^2)^2} + \frac{(1+\delta^2)(8\delta+8\delta^3)}{2(1-\delta^2)^4} \right] \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4a^2} \frac{-4\delta(1-\delta^2)^2 + 4\delta(1+\delta^2)^2}{4\delta^2(1-\delta^2)^2} \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \frac{\delta}{(1-\delta^2)^2}
 \end{aligned}$$

ამ ძალის მიმართულება ისეთია რომ მუხტი მიიზიდება კედლების მხრიდან

ასევე შეგვიძლია გამოვთვალოთ ძალა მუხტსა და მის გამოსახულება მუხტს შორის. მათ შორის მანძილია $r'_0 - r_0 = a\delta(1/\delta^2 - 1) = a(1-\delta^2)/\delta$, ხოლო მუხტების ნამრავლი იქნება $qq' = -q^2/\delta$, კულონის კანონი მოგვცემს

$$|\mathbf{F}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{a^2} \frac{\delta}{(1-\delta^2)^2} \quad (3.18)$$

რაც იგივეა რაც ძალა მუხტსა და ზედაპირს შორის. არის თუ არა მუხტზე მოქმედი ძალა ყოველთვის ძალა მუხტსა და მის გამოსახულებას შორის? პასუხი დადებითია. უფრო მეტიც, ხშირად არა მხოლოდ მოსახერხებელი არამედ აუცილებელია ძალის გამოთვლა სწორედ მუხტსა და გამოსახულება მუხტს შორის. მაგ. როცა გვინდა გამოვთვალოთ მუშაობა როემლიც საჭიროა იმისათვის, რომ მუხტი გადავაადგილოთ ერთი ადგილიდან მეორეში, უნდა გამოვიყენოთ გამოსახულება

მუხტების მიერ შექმნილი პოტენციალი და არა ინდუცირებული მუხტების, ვინა-
დან მუხტის მოძრაობისას იცვლება თავად ზედაპირზე ინდუცირებული მუხტების
განაწილება.

ელექტრომაგნიტური ველის განტოლებები

§23	მაქსველის განტოლებები	53
§23.1	მაქსველის დიფერენციალური განტოლებები	53
§23.2	მაქსველის დიფერენციალური განტოლებები მრუდწირულ კოორ- დინატებში	55
§23.3	მაქსველის ინტეგრალური განტოლებები	57
§24	მაგნიტური დენები და მუხტები	57
§25	უწყვეტობის განტოლებები	58
§26	ტალღური განტოლებები	58
§27	სასაზღვრო პირობები	59
§28	უმოვ-პოინტინგის თეორემა	62

§23 მაქსველის განტოლებები

§23.1 მაქსველის დიფერენციალური განტოლებები

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.1\text{ა})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.1\text{ბ})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4.1\text{გ})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.1\text{დ})$$

იზოტროპული, ერთგვაროვანი, წრფივი გარემოსათვის ადგილი აქვს მატერიალურ განტოლებებს:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (4.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (4.2b)$$

ამ შემთხვევაში (4.2) განტოლებების გათვალისწინებით მაქსველის (4.1) განტოლებები მიიღებენ სახეს:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4.3b)$$

$$\varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (4.3g)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.3d)$$

სადაც

- $\mathbf{E}$ და $\mathbf{H}$ ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობების ვექტორებია განზომილებებით [ვ/მ] და [ა/მ] .
- $\mathbf{j}$ – დენის მოცულობითი სიმკვრივეა რომელიც ტოლია $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ სადაც σ გარემოს კუთრი გამტარებლობაა განზომილებით [ომ/მ]
- ε —გარემოს დიელექტრიკული შეღწევადობა [ფ/მ]. თავისუფალი გარემოსათვის (ვაკუუმი)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ფ/მ}$$

- μ —გარემოს მაგნიტური შეღწევადობა [ჰნ/მ]. თავისუფალი გარემოსათვის (ვაკუუმი)

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ჰნ/მ}$$

- ρ —მუხტის მოცულობითი სიმკვრივეა [კ/მ³].
- $\mathbf{D}$ და $\mathbf{B}$ ელექტრული წანაცვლების და მაგნიტური ინდუქციის ვექტორებია განზომილებებით [კ/მ²] და [ვბ/მ²] .

დროში ჰარმონიული ველის შემთხვევაში $\partial \mathbf{E} / \partial t = i\omega \mathbf{E}$ და $\partial \mathbf{H} / \partial t = i\omega \mathbf{H}$, მაშინ განტოლებები (4.3a) და (4.3b) მიიღებენ სახეს:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + i\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (4.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega \mu \mathbf{H} \quad (4.5)$$

თუ (4.4) გავითვალისწინებთ j განმარტებას მივიღებთ

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \epsilon' \mathbf{E}$$

სადაც ϵ' არის ე.წ. კომპლექსური დიელექტრიკული შეღწევადობა

$$\epsilon' = \epsilon \left(1 + \frac{\sigma}{i\omega\epsilon} \right)$$

§23.2 მაქსველის დიფერენციალური განტოლებები მრუდ-წირულ კოორდინატებში

უზიარა საჭიროა ჩავწეროთ მაქსველის განტოლებები კომპონენტების სახით. ამოცანის სიმეტრიიდან გამომდინარე ხელსაყრელია ჩაიწეროს განტოლებები იმ კოორდინატთა სისტემაში რა სიმეტრიაც ახასიათებს ამოცანას. მრუდწირული კოორდინატების შესახებ იხ. დანართი

მართკუთხა საკოორდინატო სისტემა^①

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= i\omega \epsilon' E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= i\omega \epsilon' E_y \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= i\omega \epsilon' E_z \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -i\omega \mu H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -i\omega \mu H_y \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -i\omega \mu H_z \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (4.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (4.9)$$

^①იგულისხმება დროში პარმონიული შემთხვევა

ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \phi} - \frac{\partial H_\phi}{\partial z} &= i\omega \epsilon' E_r \\ \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} &= i\omega \epsilon' E_\phi \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} = i\omega \epsilon' E_z \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \phi} - \frac{\partial E_\phi}{\partial z} &= -i\omega \mu H_r \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -i\omega \mu H_\phi \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} = -i\omega \mu H_z \quad (4.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r D_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho \quad (4.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad (4.15)$$

სადაც E_r, E_ϕ, E_z და H_r, H_ϕ, H_z ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობის ვექტორების კომპონენტებია ცილინდრულ საკოორდინატო სისტემაში.

სფერული საკოორდინატო სისტემა

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (H_\phi \cos \theta) - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] &= -i\omega \epsilon' E_r \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) \right] &= -i\omega \epsilon' E_\theta \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] &= -i\omega \epsilon' E_\phi \end{aligned} \quad (4.16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \cos \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (E_\phi \cos \theta) - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right] &= i\omega \mu H_r \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r E_\phi) \right] &= i\omega \mu H_\theta \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] &= i\omega \mu H_\phi \end{aligned} \quad (4.17a)$$

სადაც E_r, E_ϕ, E_θ და H_r, H_ϕ, H_θ ელექტრული და მაგნიტური ველების დაძაბულობის ვექტორების კომპონენტებია სფერულ საკოორდინატო სისტემაში.

დავალება 1.1

გამოიყვანეთ დანართში მოყვანილი ფორმულების დახმარებით მაქსველის განტოლებები:

1. სფერული საკოორდინატო სისტემისთვის.
2. ცილინდრული საკოორდინატო სისტემისთვის.

§23.3 მაქსველის ინტეგრალური განტოლებები

მაქსველის ინტეგრალურ განტოლებებს აქვთ შემდეგი სახე:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_F \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{S} = \int_F (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{წ}}) d\mathbf{S} \quad (4.18\text{a})$$

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S} \quad (4.18\text{b})$$

სადაც $\mathbf{j}$ და $\mathbf{j}_{\text{წ}}$ გამტარობის და წანაცვლების დენის სიმკვრივეა, რომლებიც განჭოლავენ ჩაკეტილ L კონტურს, რომელიც წარმოადგენს F ზედაპირის საზღვარს.

§24 მაგნიტური დენები და მუხტები

ზოგიერთი ამოცანის ამოსახსნელად მოსახერხებელია მაგნიტური დენების და მუხტების შემოტანა, მაშინ (4.3) მიიღებს სახეს

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.19\text{a})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{j}}_{\text{მაგ}} - \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (4.19\text{b})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (4.19\text{გ})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_{\text{მაგ}} \quad (4.19\text{დ})$$

მაგნიტური დენების და მუხტების შემოტანისას შესაბამისად შეიცვლება მაქსველის განტოლებები კომპონენტების ენაზე რომლებიც გამოყვანილ იქნა ზემოთ სხვადასხვა საკოორდინატო სისტემებისთვის.

§25 უწყვეტობის განტოლებები

ანალოგიურად მაგნიტური დენების და მუხტების შემთხვევაში გვექნება:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.20)$$

ანალოგიურად მაგნიტური დენების და მუხტების შემთხვევაში გვექნება:

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{მაგ}} + \frac{\partial \rho_{\text{მაგ}}}{\partial t} = 0 \quad (4.21)$$

ამ ფორმულებში თუ გავითვალისწინებთ (4.19) მოყვანილ მატერიალურ განტოლებებს მივიღებთ:

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.22\text{a})$$

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{j}_{\text{მაგ}} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.22\text{b})$$

ფორმულები (4.22a) და (4.22b) ნიშნავს რომ სრული დენი რომელიც გადის მოცულობის ერთეულში ნულის ტოლია. $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ შეიძლება განვიხილოთ, როგორც მაგნიტური წანაცვლების დენი.

წრფივი დენების შემთხვევაში (ანუ დენი მიედინება მხოლოდ ერთი მიმართულებით) (4.22a) და (4.22b) მიიღებენ სახეს:

$$\frac{\partial \vec{I}}{\partial z} + \frac{\partial \rho_{\text{წრ.}}}{\partial t} = 0 \quad (4.23\text{a})$$

$$\frac{\partial \vec{I}_{\text{მაგ}}}{\partial z} + \frac{\partial \rho_{\text{წრ.მაგ}}}{\partial t} = 0 \quad (4.23\text{b})$$

სადაც $\rho_{\text{წრ.}}$ და $\rho_{\text{წრ.მაგ}}$ ელექტრული და მაგნიტური მუხტების სიმკვრივეებია z გასწვრივ.

§26 ტალღური განტოლებები

მაქსველის განტოლებებიდან შეგვიძლია გამოვიყვანოთ ტალღური განტოლებები:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon' \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mu \epsilon' \mathbf{E} \quad (4.24\text{a})$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \mu \epsilon' \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\omega^2 \mu \epsilon' \mathbf{H} \quad (4.24\text{b})$$

სადაც ∇^2 ლაპლასის ოპერატორია.

დავალეზა №4.1 ტალღური განტოლებები

გამოიყვანეთ ზემოთ მოყვანილი განტოლებები მაქსველის განტოლებებიდან

დავალეზა 4.1 გვ. 59 ტალღური განტოლებები (4.24ა) და (4.24ბ) შეგვიძლია ჩავწეროთ სხვადასხვა საკოორდინატო სისტემებში მსგავსად მაქსველის პირველი რიგის დიფ. განტოლებებისა. ლაპლასის ოპერატორს ამ საკოორდინატო სისტემებში აქვს შემდეგი სახე:

მართკუთხა საკოორდინატო სისტემა:

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (4.25)$$

ცილინდრული საკოორდინატო სისტემა:

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (4.26)$$

სფერული საკოორდინატო სისტემა:

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\operatorname{tg} \theta}{r^2} \frac{\partial A}{\partial \theta} \quad (4.27)$$

სადაც A შეიძლება იყოს არა მარტო ელექტრული ან მაგნიტური ვექტორული ველი არამედ ამ ველის რომელიმე კომპონენტიც მართკუთხა საკოორდინატო სისტემაში და E_z, H_z ცილინდრულ საკოორდინატო სისტემაში.

(4.24ა) და (4.24ბ) განტოლებების მარცხენა მხარე ახასიათებს ელექტრომაგნიტური ველის გეომეტრიულ სტრუქტურას, ხოლო მარჯვენა მხარე, ველის ცვლილებას დროში და წარმოადგენს სიხშირის ფუნქციას. ამგვარად ეს განტოლებები აჩვენებენ, რომ ველის გეომეტრიული სტრუქტურა დამოკიდებულია სიხშირეზე. გამონაკლისს წარმოადგენენ TEM (განივი ელექტრომაგნიტური ველი) ტიპის ტალღები, რომელთა სტრუქტურა არაა დამოკიდებული სიხშირეზე.

§27 სასაზღვრო პირობები

ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე ადგილი აქვს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

1. ერთი გარემოდან მეორეში გადასვლილას ელექტრული ველის მხები (ტანგენციალური, გასწვრივი) მდგენელი უწყვეტია. ვექტორული ფორმით ამ პირობას აქვს სახე

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \quad (4.28)$$

სადაც $\mathbf{E}_1$ და $\mathbf{E}_2$ ელექტრული ველებია პირველ და მეორე გარემოში, ხოლო $\mathbf{n}$ ორი გარემოს გამყოფი ზედაპირის ნორმალა.

2. თუკი ერთ-ერთ გარემო იდეალური გამტარია ($\sigma = \infty$), მაშინ ველი მასში ვერ აღწევს და ამ შემთხვევაში:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad (4.29)$$

3. თუ ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე არსებობს თავისუფალი ელექტრული მუხტები (q თავისუფალი მუხტების ზედაპირული სიმკვრივეა), მაშინ $\mathbf{D}$ ნორმალური მდგენელი განიცდის წყვეტას (ანუ ცვლება ნახტომისებურად):

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_2 = q \quad (4.30)$$

როცა ერთი გარემო იდეალური გამტარია, მაშინ მასში ელექტრული ველის დაბულობა ნულია, მაშინ (4.30) მიიღებს სახეს:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_1 = q \quad (4.31)$$

4. ერთი გარემოდან მეორეში გადასვლისას $\mathbf{B}$ ველის ნორმალური მდგენელი უწყვეტია:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 \quad (4.32)$$

5. თუ ერთ-ერთი გარემო იდეალური გამტარია მაშინ $\mathbf{B}$ და შესაბამისად $\mathbf{H}$ ნორმალური მდგენელი ამ გარემოში ნულია და ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_1 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2 = 0 \quad (4.33)$$

6. თუ ორი გარემოს გამყოფ საზღვარზე გვაქვს ელექტრული დენი მაშინ $\mathbf{H}$ ($\vec{\sigma}$ ზედაპირული დენის სიმკვრივეა) გასწვრივი მდგენელი განიცდის წყვეტას:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{H}_2 = \vec{\sigma} \quad (4.34)$$

როცა ერთ-ერთი(დავუშვათ მეორე) გარემო იდეალური გამტარია მაშინ

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \vec{\sigma} \quad (4.35)$$

7. მაგნიტური მუხტების და დენების შემოტანის შემთხვევაში ადგილი აქვს შემდეგ სასაზღვრო პირობებს:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = \vec{\sigma}_{\text{მაგ}} \quad (4.36\text{a})$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 = \eta_{\text{მაგ}} \quad (4.36\text{b})$$

სადაც $\vec{\sigma}_{\text{მაგ}}$ და $\eta_{\text{მაგ}}$ ზედაპირული მაგნიტური დენის და მაგნიტური მუხტის სიმკვრივეებია.

8. თუ ერთ-ერთი გარემო ხასიათდება დიდი მაგრამ სასრული გამტარებლობით

მაშინ $\mathbf{E}$ და $\mathbf{H}$ მხები მდგენელები გარემოს გამყოფ ზედაპირზე ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი მიახლოებითი ტოლობით (ლეონტოვიჩის სასაზღვრო პირობა):

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} [\mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H})] \quad (4.37)$$

§28 უმოვ-პოინტინგის თეორემა

მაქსველის განტოლებებიდან შეგვიძლია მივიღოთ შემდეგი ტოლობა:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{\mu H^2}{2} \right) dV = \int_F \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dF + \int_V \mathbf{E} \mathbf{j} dV \quad (4.38)$$

- ელექტრული ველის ენერგიის სიმკვრივე
- მაგნიტური ველის ენერგიის სიმკვრივე
- ზედაპირის ფართის ერთეულიდან გამომავალი ნაკადი
- მოცულობის ერთეულში შთანთქმული ენერგია

სადაც dV მოცულობის (V) ელემენტი, dF კი V მოცულობის შემოშაზღვრული F ზედაპირის ელემენტი. (4.38) ცნობილია როგორც უმოვ-პოინტინგის თეორემა, რომელიც აღწერს ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის ბალანსს. (4.38) ში მარცხენა მხარეს ინტეგრალქვეშა გამოსახულება წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველის სრული ენერგიის სიმკვრივეს, ხოლო თავად ინტეგრალი წარმოადგენს V მოცულობაში არსებულ ენერგიას. — ნიშანი ნიშნავს რომ ენერგია მოცულობაში მცირდება. ტოლობის მარჯვენა მხარეს არსებული გამოსახულება $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ წარმოადგენს ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის ნაკადს. მას პოინტინგის ვექტორი ეწოდება. ხოლო $\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$ არის პოინტინგის ვექტორის ნორმალური მდგენელი. ინტეგრალი $\int_F \mathbf{n} \cdot \mathbf{P} dF$ წარმოადგენს ენერგიას რომელიც გაედინება მოცულობიდან

დროის ერთეულში. მარცხენა მხარეს მეორე ინტეგრალი წარმოადგენს ენერგიას რომელიც იხარჯება (სითბოს გამოყოფა, ველის წყაროებიდან მიღებული ენერგია) ამ მოცულობაში დროის ერთეულში. უმოვ-პოინტინგის თეორემა შეიძლება ასე ჩამოყალიბდეს: რაღაც მოცულობაში არსებული ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის ცვლილება ხდება ამ მოცულობიდან ენერგიის გადინებით (გავრცელებით) და სისტემის შიგნით ხარჯვით.

ზოგადად $\int_V \mathbf{E} \mathbf{j} dV$ შედგება ორი, დადებითი და უარყოფითი ნაწილისაგან. დადებითი ნაწილი წარმოადგენს ენერგიას რომელიც გადადის სითბოში (ჯოულის სითბო), ხოლო უარყოფითი წარმოადგენს ამ მოცულობაში არსებული გარე ველის წყაროების მიერ წარმოებულ ენერგიას. ანუ

$$j = j_{\text{გამტარობის}} - j_{\text{გარე}}$$

სადაც $j_{\text{გამტარობის}} = \sigma \mathbf{E}$. ამის გათვალისწინებით ბოლო ინტეგრალი მიიღებს სახეს

$$\int_V \mathbf{E} j dV = \int_V \sigma \mathbf{E}^2 dV - \int_V \mathbf{E} j_{\text{გარე}} dV \quad (4.39)$$

თუ გან. (4.38) მარცხენა მხარეს არსებულ ინტეგრალს ავლნიშნავთ W -თი და გავითვალისწინებთ (4.39) ტოლობას მივიღებთ:

$$\int_V \mathbf{E} j_{\text{გარე}} dV = \frac{\partial W}{\partial t} + \int_V \sigma \mathbf{E}^2 dV + \int_F \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dF \quad (4.40)$$

რაც ნიშნავს: რაღაც მოცულობაში გარე წყაროების მიერ დროის ერთეულში წარმოებული ენერგია (ანუ სიმძლავრე) იხარჯება ელექტრომაგნიტური ველის ენერგიის ცვლილებაზე, ჯოულის სითბოზე და ამ მოცულობიდან ელექტრომაგნიტური ველის გამოსხივებაზე. ამრიგად, უმოვ-პოინტინგის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ შესაძლებელია ელექტრომაგნიტური ველის გამოსხივება მოცულობიდან სადაც მდებარეობენ ველის წყაროები. (4.38) და (4.40) წარმოადგენენ სიმძლავრის ბალანსის განტოლებებს დროის მყისიერ მომენტში. ველის ჰარმონიულად ცვლილების შემთხვევაში ხშირად ოპერირებენ დროში (პერიოდის განმავლობაში) საშუალო სიდიდეებით. თუ გავითვალისწინებთ განტოლებაში შემავალი სიდიდეების კომპლექსურობას და გავასაშუალოებთ ორივე მხარეს პერიოდის განმავლობაში (4.40)დან მივიღებთ:

$$\frac{1}{2} Re \int_V \mathbf{E} j_{\text{გარე}}^* dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}^* dV + \frac{1}{2} Re \int_F \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) dF \quad (4.41)$$

$\frac{\partial W}{\partial t}$ წევრი დროში გასაშუალოებისას ნულის ტოლია (სტაციონალური პროცესი), ხოლო "*" აღნიშნავს კომპლექსურად შეუღლებას. "Re" ნიშნავს რომ აღებულ უნდა იქნას ინტეგრალქვეშა გამოსახულების რეალური ნაწილი. თუ ჩავთვლით რომ სისტემაში დანაკარგები მცირეა მაშინ (4.41) მიიღებს სახეს:

$$\frac{1}{2} Re \int_V \mathbf{E} j_{\text{გარე}}^* dV = \frac{1}{2} Re \int_F \mathbf{n} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) dF \quad (4.42)$$

რაც ნიშნავს რომ სისტემაში არსებული ველის წყაროებიდან გამოყოფილი ენერგია სრულად გამოსხივდება.

დანართი

კო- და კონტრავარიანტული მდგენელები

ჩ.1	ბაზისი და მეტრიკული ტენზორი	67
ჩ.1.1	კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტების განმარტება	68
ჩ.1.2	მეტრიკული ტენზორი და ინდექსების აწევა-დაწევა	68
ჩ.1.3	კომპონენტთა გარდაქმნის კანონები	69
ჩ.1.4	ფიზიკური კომპონენტები (x^{*i} და x_i^*)	70
ჩ.2	კო- და კონტრავარიანტული კოორდინატები, გეგმილები და ფიზიკური მდგენელები მახვილკუთხა და დუალურ სისტემებში	72
ჩ.3	პაულის შენიშვნა და ორთოგონალური გეგმილები	75
ჩ.3.1	პაულის შენიშვნის გეომეტრიული შინაარსი	75
ჩ.3.2	კორენევის წიგნიდან პირველი აგება (მართობი e_1 -ზე)	76
ჩ.3.3	კორენევის წიგნიდან მეორე აგება (e_2 -ის პარალელური წრფის გაგრძელება დუალურ ღერძზე)	79
ჩ.4	ვექტორის ფიზიკური კოორდინატები და მათ შორის კავშირები	81
ჩ.4.1	კავშირი ფიზიკურ კოვარიანტულ (x_i^*) და კოვარიანტულ (x_i) კომპონენტებს შორის	82
ჩ.4.2	კავშირი ფიზიკურ კონტრავარიანტულ (x^{*i}) და კონტრავარიანტულ (x^i) კომპონენტებს შორის	82
ჩ.4.3	კავშირი ფიზიკურ კოვარიანტულ (x_i^*) და კონტრავარიანტულ (x^i) კომპონენტებს შორის	83
ჩ.4.4	კავშირი ფიზიკურ კონტრავარიანტულ (x^{*i}) და კოვარიანტულ (x_i) კომპონენტებს შორის	83
ჩ.4.5	კავშირი ფიზიკურ კოვარიანტულ (x_i^*) და ფიზიკურ კონტრავარიანტულ (x^{*j}) კოორდინატებს შორის	84

ჩ.4.6	კოვარიანტულ კოორდინატებსა და ორთოგონალურ გეგმილს შორის კავშირი	84
ჩ.4.7	კონტრავარიანტულ კოორდინატებსა და დუალურ ღერძზე გეგმილს შორის კავშირი	85
ჩ.4.8	ხუთივე კოორდინატული და გეომეტრიული სიდიდის $(x_i, x^i, x_i^* \equiv P_i, x^{*i}, P^i)$ ექსპერიმენტული ინტერპრეტაცია	86
ჩ.5	გაზომვადობა არაორთოგონალურ საკოორდინატო სისტემაში	89
ჩ.5.1	ფიზიკური კოვარიანტული კომპონენტი (ორთოგონალური გეგმილი)	89
ჩ.5.2	ფიზიკური კონტრავარიანტული კომპონენტი (პარალელური მდგენელი)	90
ჩ.5.3	მათემატიკური დამოკიდებულება და გადახრის სიდიდე	90
ჩ.6	მეტრიკა ირიბკუთხა კოორდინატებში. ურთიერთშეუღლებული სისტემები და ფუნდამენტური ობიექტი	91
ჩ.6.1	ირიბკუთხა კოორდინატთა სისტემა და წერტილის მდებარეობის დაფიქსირება	91
ჩ.6.2	გარდაქმნის მატრიცა β_k^i და მეტრიკული ტენზორი g_{ik}	92
ჩ.6.3	კავშირი ფიზიკურ მონაკვეთებსა (Z^i) და კონტრავარიანტულ კოორდინატებს (z^i) შორის	93
ჩ.6.4	კოვარიანტული კომპონენტების z_i გეომეტრიული გამოყვანა	94
ჩ.6.5	ვექტორის ოთხი წარმოდგენა	95
ჩ.6.6	ურთიერთშეუღლებული (დუალური) კოორდინატთა სისტემა	97
ჩ.6.7	შეუღლებული სისტემის მათემატიკური გამოყვანა მატრიცული მეთოდით	98
ჩ.6.8	ორთოგონალური ბაზისების კერძო შემთხვევა	99

ამ დანართში e_i არაა არც ორთოგონალური და არც ერთეულოვანი ბაზისი. ასევე არ განვიხილავთ ვექტორულ აღრიცხვას. მახვილკუთხა საკოორდინატო სისტემის მაგალითზე გავარჩევთ ვექტორის კო- და კონტრავარიანტულ კოორდინატებს, პირდაპირ და დუალურ ბაზისებს და გეგმილებს ამ ბაზისებზე. რეკომენდირებული წიგნები დაწვრილებით გასარჩევად: კორენევი, ვეკუა, ლიზნეროვიჩი, Goreux.

ჩ.1 ბაზისი და მეტრიკული ტენზორი

განვიხილოთ n -განზომილებიანი ევკლიდური სივრცე.

1. კოვარიანტული ბაზისი e_i განისაზღვრება საკოორდინატო წირების მხები ვექტორებით.

2. კონტრავარიანტული (დუალური) ბაზისი $\mathbf{e}^i$ განისაზღვრება პირობით:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (\text{1.1})$$

1.1.1 კოვარიანტული და კონტრავარიანტული კომპონენტების განმარტება

ერთი და იგივე $\mathbf{x}$ ვექტორი სივრცეში შეიძლება გაიშალოს როგორც ძირითადი ბაზისის $\{\mathbf{e}_k\}$, ისე შეუღლებული (ორმხრივი) ბაზისის $\{\mathbf{e}^k\}$ ვექტორების მიხედვით:

1. გაშლა ძირითად ბაზისში:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^3 x^k \mathbf{e}_k \equiv x^k \mathbf{e}_k, \quad \text{სადაც} \quad x^k = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^k \quad (\text{1.2})$$

x^k რიცხვებს ეწოდებათ $\mathbf{x}$ ვექტორის კონტრავარიანტული კომპონენტები.

2. გაშლა შეუღლებულ (დუალურ) ბაზისში:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}^1 + x_2 \mathbf{e}^2 + x_3 \mathbf{e}^3 = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{e}^k \equiv x_k \mathbf{e}^k, \quad \text{სადაც} \quad x_k = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_k \quad (\text{1.3})$$

x_k რიცხვებს ეწოდებათ $\mathbf{x}$ ვექტორის კოვარიანტული კომპონენტები.

1.1.2 მეტრიკული ტენზორი და ინდექსების აწევა-დაწევა

კოვარიანტულ და კონტრავარიანტულ კომპონენტებს შორის კავშირი განისაზღვრება სკალარული ნამრავლით :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = x^k (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i) \quad (\text{1.4})$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^i = x_k (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^i) \quad (\text{1.5})$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები — მეტრიკული ტენზორის კომპონენტები:

$$g_{ik} = g_{ki} \equiv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k, \quad g^{ik} = g^{ki} \equiv \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k \quad (\text{1.6})$$

შეიძლება ჩვენება, რომ

$$g_{ij} g^{jk} \equiv g_i^k \equiv \delta_i^k = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \quad (\text{1.7})$$

აქედან მივიღებთ ინდექსების აწევა-დაწევის ფუნდამენტურ ოპერაციებს: გავამრავლოთ (3) განტოლება სკალარულად $\mathbf{e}_j$ ვექტორზე:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = (x^i \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = x^i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = g_{ij} x^i \quad (\text{1.8})$$

მეორე მხრივ, (4) განტოლების სკალარული გამრავლებით $\mathbf{e}_j$ -ზე მივიღებთ:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = (x_i \mathbf{e}^i) \cdot \mathbf{e}_j = x_i (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j) = x_i \delta_j^i = x_j \quad (\text{ჩ.9})$$

საიდანაც გამომდინარეობს:

$$x_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j = g_{ji} x^i \quad (\text{ჩ.10})$$

ანალოგიურად, სკალარული გამრავლებით $\mathbf{e}^j$ დუალურ ბაზისზე:

$$x^j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^j = g^{ji} x_i \quad (\text{ჩ.11})$$

ანუ

$$x_i = g_{ik} x^k \quad (\text{ინდექსის დაწევა}) \quad (\text{ჩ.12})$$

$$x^i = g^{ik} x_k \quad (\text{ინდექსის აწევა}) \quad (\text{ჩ.13})$$

ცხრა სიდიდე g_{ik} (და შესაბამისად g^{ik}) ადგენს II რანგის მეტრიკულ ტენზორს.

თუ აღვნიშნავთ $G = \det(g_{ik})$ -ით, მაშინ შებრუნებული ტენზორის კომპონენტები გამოითვლება ალგებრული დამატებებით:

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G} \quad (\text{ჩ.14})$$

ხოლო ძირითად ბაზისზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობა $V = \sqrt{G}$.

ჩ.1.3 კომპონენტთა გარდაქმნის კანონები

კომპონენტების დასახელება უკავშირდება კოორდინატთა სისტემის გარდაქმნისას მათ ქცევას:

- **კოვარიანტული კომპონენტები** გარდაიქმნებიან პირდაპირი გარდაქმნის $a_{i'}^k$ კოეფიციენტების მეშვეობით (ბაზისური ვექტორების მსგავსად):

$$x_{i'} = a_{i'}^k x_k \quad (\text{ჩ.15})$$

$$\mathbf{e}_{i'} = a_{i'}^k \mathbf{e}_k \quad (\text{ჩ.16})$$

- **კონტრავარიანტული კომპონენტები** გარდაიქმნებიან შებრუნებული გარდაქმნის $a_k^{i'}$ კოეფიციენტების მეშვეობით:

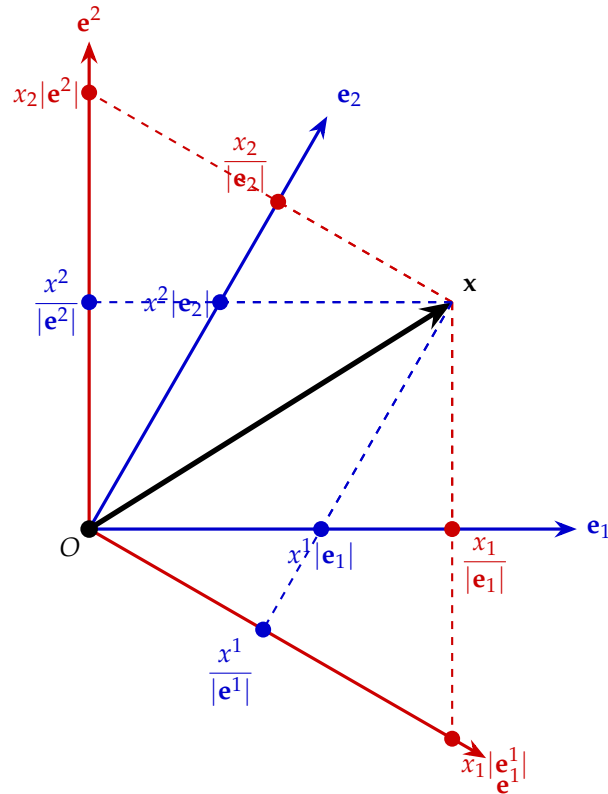
$$x^{i'} = a_k^{i'} x^k \quad (\text{ჩ.17})$$

$$\mathbf{e}^{i'} = a_k^{i'} \mathbf{e}^k \quad (\text{ჩ.18})$$

და

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i \quad (\text{ჩ.19})$$

$$a_k^{i'} a_{j'}^k = \delta_{j'}^{i'} \quad (\text{ჩ.20})$$



სურ 1.1: ვექტორის კოვარიანტული (წითელი) და კონტრავარიანტული (ლურჯი) კომპონენტები სიბრტყეზე (ნახაზი 1.20).

შენიშვნა: ირიბკუთხა და მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემებში წერტილის კოორდინატები ყოველთვის იწერება ზედა ინდექსით (x^1, x^2, x^3) , რადგან ისინი წარმოადგენენ ამ წერტილის $\mathbf{r}$ რადიუს-ვექტორის კონტრავარიანტურ კომპონენტებს:

$$\mathbf{r} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = x^k \mathbf{e}_k \quad (1.21)$$

1.1.4 ფიზიკური კომპონენტები (x^{*i} და x_i^*)

საინჟინრო და ფიზიკურ გამოყენებებში არსებითია ის ფაქტი, რომ x^i და x_i კომპონენტებს შესაძლოა ჰქონდეთ განსხვავებული განზომილებები, რაც გამოწვეულია $\mathbf{e}_i$ და $\mathbf{e}^i$ ბაზისური ვექტორების განზომილებებითა და $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^i = 1$ პირობით.

იმისათვის, რომ კომპონენტების განზომილება ემთხვეოდეს განხილული ვექტორის ფიზიკურ განზომილებას, შემოჰყავთ **ფიზიკური (ფაქტობრივი) კომპონენტები**.

განმარტოთ ერთეულოვანი ბაზისები:

$$\mathbf{e}_i^* = \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} \text{ (ა)}, \quad \mathbf{e}^{*i} = \mathbf{e}^i |\mathbf{e}_i| \text{ (ბ)} \quad (\text{ქ.22})$$

(ა)- ესაა ერთეულოვანი ვექტორის განმარტება^①.

რაც შეეხება (ბ) ფორმულას მისი მიღების ერთ-ერთი გზა არის შემდეგი: დუალური ბაზისი განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ:

$$|\mathbf{e}^i| = \frac{1}{|\mathbf{e}_i|} \quad (\text{ქ.23})$$

ერთეულოვანი ვექტორი $\mathbf{e}^{*i}$ განმარტებით არის $\mathbf{e}^i$ ვექტორი გაყოფილი თავის სავე სიგრძეზე (ნორმაზე):

$$\mathbf{e}^{*i} = \frac{\mathbf{e}^i}{|\mathbf{e}^i|}$$

თუ მნიშვნელში ჩავსვამთ ზემოთ მოყვანილ ტოლობას, მივიღებთ:

$$\mathbf{e}^{*i} = \frac{\mathbf{e}^i}{\frac{1}{|\mathbf{e}_i|}} = \mathbf{e}^i |\mathbf{e}_i|$$

მაშინ $\mathbf{x}$ ვექტორი ჩაიწერება ფიზიკური კომპონენტების მეშვეობით:

$$\mathbf{x} = x^{*i} \mathbf{e}_i^* = x_i^* \mathbf{e}^{*i} \quad (\text{ქ.24})$$

^①შეგახსენებთ, რომ ორთოგონალურ მრუდწირულ საკოორდინატო სისტემაში $|\mathbf{e}_i| \equiv \sqrt{g_{ii}} \equiv h_i$ ლამეს პარამეტრია. ზოგიერთ ლიტერატურაში $|\mathbf{e}_i| \equiv H_i$, ხოლო $|\mathbf{e}^i| \equiv h_i$ და ამ აღნიშვნებში $h_i \cdot H_i = 1$.

კლასიკურ დიფერენციალურ გეომეტრიაში და თეორიულ ფიზიკაში საკუთრივ „ლამეს პარამეტრების“ ცნება (h_1, h_2, h_3) განმარტებულია მხოლოდ ორთოგონალური მრუდწირული კოორდინატებისათვის. არაორთოგონალურ სივრცეებში მხოლოდ h_i სიგრძეები საკმარისი არ არის სივრცის სრული გეომეტრიის აღსაწერად (რადგან ღერძებს შორის არსებული კუთხეები იკარგება), ამიტომ ასეთ დროს გადადიან უშუალოდ ტენზორულ აღნიშვნებსა და მეტრიკულ ტენზორებზე (g_{ij} და g^{ij}).

არაორთოგონალურ (ირიბკუთხა) სისტემაშიარადიაგონალური ელემენტები ნულისგან განსხვავდება ($g_{ij} \neq 0$), რის გამოც შებრუნებული მატრიცის g^{ij} კომპონენტში შემოდის კუთხეების ეფექტი. მაგალითად, ორგანზომილებიან ირიბკუთხა სისტემაში, სადაც ღერძებს შორის კუთხეა ϕ :

$$g^{11} = \frac{1}{g_{11} \sin^2 \phi}$$

შესაბამისად, კონტრავარიანტული მასშტაბური მამრავლი იქნება:

$$H_1 = \sqrt{g^{11}} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}} \sin \phi} = \frac{1}{h_1 \sin \phi}$$

მათი ნამრავლი კი მოგვცემს:

$$h_1 \cdot H_1 = \frac{1}{\sin \phi} \neq 1 \quad (\text{რადგან ირიბკუთხა სისტემაში } \phi \neq 90^\circ)$$

ფიზიკური კომპონენტების გამოყვანა

ზოგად მრუდწირულ კოორდინატთა სისტემაში საბაზისო ვექტორები $\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i}$ ზოგადად არ არიან ერთეულოვანი სიგრძის ($|\mathbf{e}_i| \neq 1$). ფიზიკური კომპონენტების განსაზღვრისათვის შემოჰყავთ ნორმირებული (ერთეულოვანი) საბაზისო ვექტორები:

$$\mathbf{e}^*_i = \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (\text{1.25})$$

1. კონტრავარიანტული ფიზიკური კომპონენტი (x^{*i}): ვექტორის გამლა ბუნებრივ და ერთეულოვან ბაზისებში შესაბამისად ჩაიწერება:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^{*i} \mathbf{e}^*_i = x^{*i} \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} \quad (\text{1.26})$$

საიდანაც უშუალოდ გამომდინარეობს პარალელური პროექციის ფორმულა:

$$x^{*i} = x^i |\mathbf{e}_i| = x^i \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{ინდექსით } i \text{ არ მიმდინარეობს აჯამვა}) \quad (\text{1.27})$$

2. კოვარიანტული ფიზიკური კომპონენტი (x_i^*): ჩვეულებრივი კოვარიანტული კომპონენტი განისაზღვრება სკალარული ნამრავლით $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$. ერთეულოვან ვექტორზე ორთოგონალური პროექციისათვის ვიღებთ:

$$x_i^* = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^*_i = \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} \quad (\text{1.28})$$

საიდანაც ვიღებთ ორთოგონალური პროექციის ფორმულას:

$$x_i^* = \frac{x_i}{|\mathbf{e}_i|} = \frac{x_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (\text{ინდექსით } i \text{ არ მიმდინარეობს აჯამვა}) \quad (\text{1.29})$$

ანუ

$$x^{*i} = x^i |\mathbf{e}_i| \quad (\text{კონტრ. ფიზიკური კომპონენტი — პარალელური პროექცია}) \quad (\text{1.30})$$

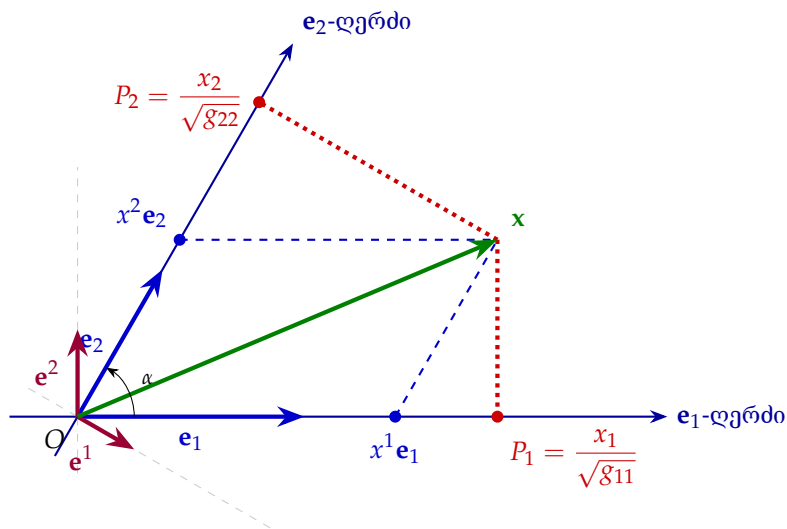
$$x_i^* = \frac{x_i}{|\mathbf{e}_i|} \quad (\text{კოვ. ფიზიკური კომპონენტი — ორთოგონალური პროექცია}) \quad (\text{1.31})$$

1.2 კო- და კონტრავარიანტული კოორდინატები, გეგმილები და ფიზიკური მდგენელები მახვილკუთხა და დუალურ სისტემებში

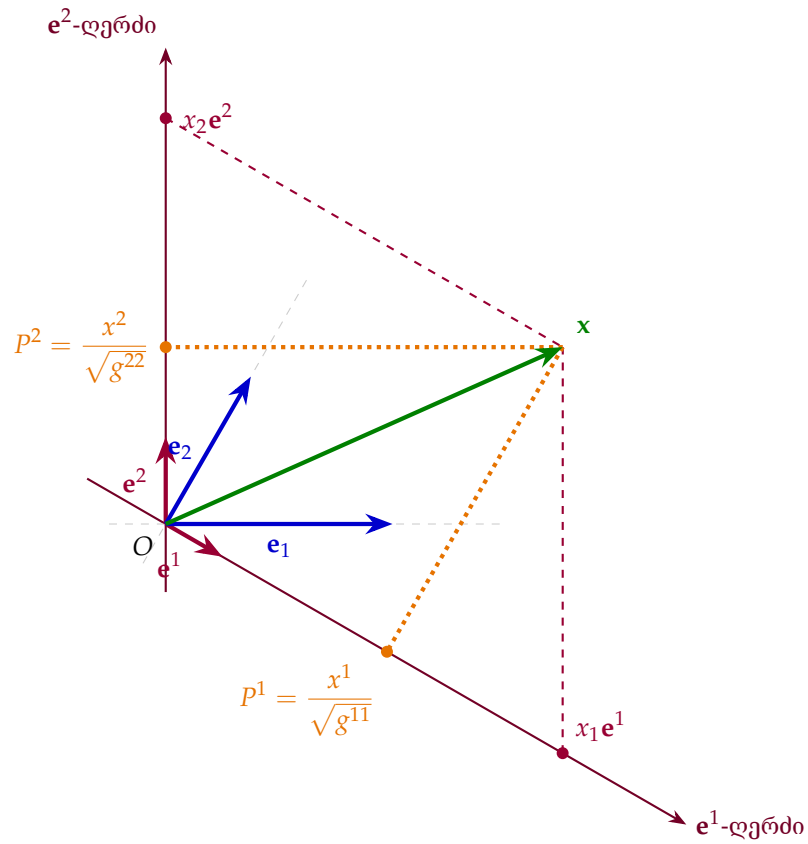
ტენზორული აღრიცხვა ჩვენი საგანი არაა, მაგრამ ინტერესიდან და სხვადასხვა ლიტერატურაში სხვადასხვა ინტერპრეტაციებიდან გამომდინარე ცოტა დაწვრილებით გავარჩიოთ.

ავიღოთ მახვილკუთხა საკოორდინატო სისტემა. ვექტორული სიდიდეების წარმოდგენისთვის არაორთოგონალურ (მახვილკუთხა) სისტემაში გამოიყენება ორი ურთიერთდაკავშირებული ბაზისი:

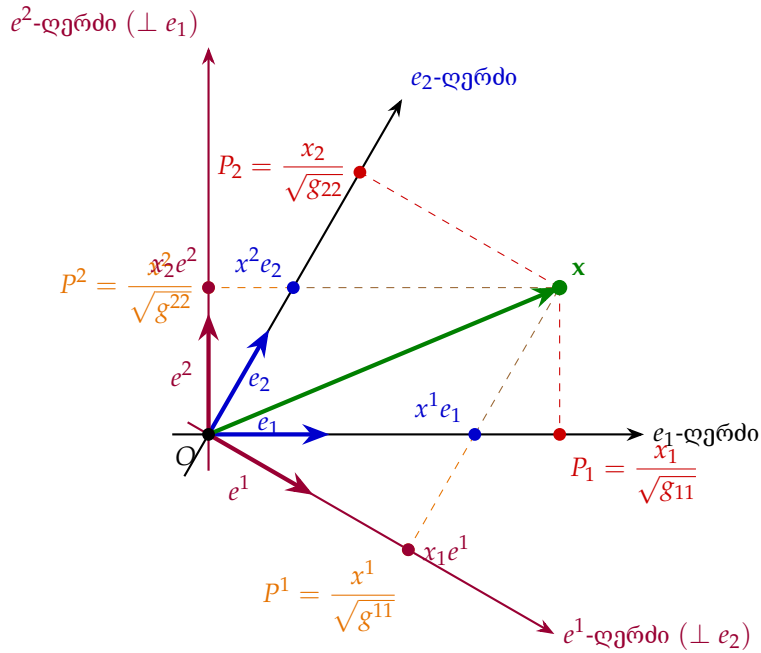
1. პირდაპირი (კოვარიანტული) ბაზისი ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) — მიმართულია საკოორდინატო ღერძების გასწვრივ.
2. შუედლებული / დუალური (კონტრაგარიანტული) ბაზისი ($\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$) — აკმაყოფილებს ორთონორმირებულობის პირობას $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$ (ანუ $\mathbf{e}^1 \perp \mathbf{e}_2$ და $\mathbf{e}^2 \perp \mathbf{e}_1$).



სურ ჩ.2: პირდაპირი ბაზისი ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) დუალურ ორტებთან ($\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$) ერთად: კონტრაგარიანტული კომპონენტები (x^1, x^2) და ორთოგონალური გეგმილები პირდაპირ ღერძებზე (P_1, P_2).



სურ 1.3: დუალური ბაზისი (e^1, e^2) პირდაპირ ორტეხთან (e_1, e_2) ერთად: კოვარიანტული კომპონენტები ($x_1 e^1, x_2 e^2$) და ორთოგონალური გეგმილები დუალურ ღერძებზე (p^1, p^2).



სურ ჩ.4: გაერთიანებული ნახაზი: კო- და კონტრავარიანტული ბაზისები, კოორდინატები და გეგმილები.

ჩ.3 პაულის შენიშვნა და ორთოგონალური გეგმილები

ჩ.3.1 პაულის შენიშვნის გეომეტრიული შინაარსი

ვ.პაული თავის მონოგრაფიაში «ფარდობითობის თეორია» აკეთებს მნიშვნელოვან შენიშვნას: ზოგიერთი ავტორი კოვარიანტულ კოორდინატს უწოდებს ვექტორის ორთოგონალურ პროექციას საბაზისო ვექტორზე, თუმცა აუცილებელია გათვალისწინებულ იქნას საბაზისო ვექტორის სიგრძეც.

ვიპოვოთ $\mathbf{x}$ ვექტორის P_1 ორთოგონალური გეგმილი იმ წრფეზე, რომლის გასწვრივაც მიმართულია $\mathbf{e}_1$ ვექტორი. ამ ღერძის ორტი არის:

$$\mathbf{e}^*_1 = \frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|} = \frac{\mathbf{e}_1}{\sqrt{g_{11}}} \quad (\text{ჩ.32})$$

ორთოგონალური გეგმილის სიგრძე P_1 უდრის ვექტორის სკალარულ ნამრავლს ამ ორტზე:

$$P_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^*_1 = \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1}{\sqrt{g_{11}}} \quad (\text{ჩ.33})$$

რადგან $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 = x_1$ (იხ. ფორმულა 1.3), მივიღებთ პაულის ცნობილ თანაფარდობას:

$$P_1 = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}} \implies x_1 = P_1 \sqrt{g_{11}} \quad (1.34)$$

ზოგადი i -ური ინდექსისთვის:

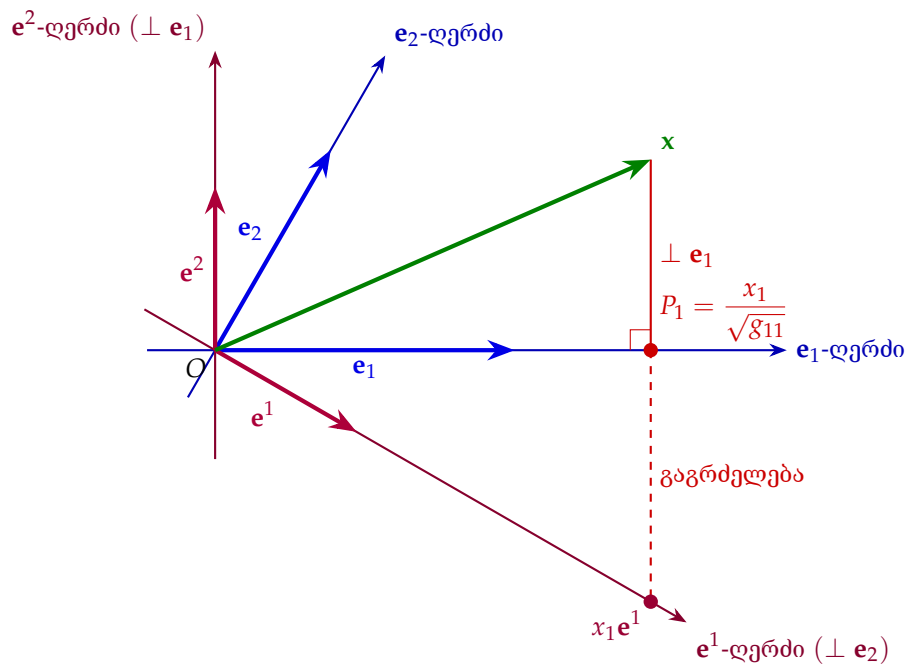
$$P_i = \frac{x_i}{\sqrt{g_{ii}}}, \quad P^i = \frac{x^i}{\sqrt{g^{ii}}} \quad (\text{ინდექსით } i \text{ აჯამება არ სრულდება}) \quad (1.35)$$

ანუ ზოგადად გვგზილი და კოორდინატი არის სხვადასხვა.

ახლა გაჩვენოთ, რომ პირდაპირ ($\mathbf{e}_1$) ღერძზე დაშვებული მართობის გადაკვეთა დუალურ ($\mathbf{e}^1$) ღერძთან იძლევა კოვარიანტულ კოორდინატს x_1 , ხოლო უშუალოდ პირდაპირ ღერძზე ამ მართობით ჩამოჭრილი მონაკვეთი წარმოადგენს ორთოგონალურ გვემილს $P_1 = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}}$. ეს გეომეტრიული აგება მოყვანილია როგორც ბორისენკო-ტარაპოვის, ისე კორენევის სახელმძღვანელოებში.

1.3.2 კორენევის წიგნიდან პირველი აგება (მართობი $\mathbf{e}_1$ -ზე)

კორენევის პირველი თეორემის დამტკიცება (მართობი $\mathbf{e}_1$ -ზე)



სურ 1.5: პირველი დუალური თეორემა: მართობი $\mathbf{e}_1$ -ზე იძლევა P_1 ორთოგონალურ გვემილს პირდაპირ ღერძზე და $x_1 \mathbf{e}^1$ კოვარიანტულ კომპონენტს დუალურ ღერძზე.

1. წრფის განტოლება განვიხილოთ $\mathbf{x}$ ვექტორი. $\mathbf{e}_1$ ღერძზე დაშვებული მართობი წრფე შედგება წერტილებისგან:

$$L_1 = \{\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}^2 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad (\text{ჩ.36})$$

ეს წრფე მართობულია $\mathbf{e}_1$ -ის, რადგან დუალური ბაზისის განმარტებით $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$.

2. გადაკვეთა პირდაპირ $\mathbf{e}_1$ ღერძთან (P_1 გეგმილი) გვსურს ვიპოვოთ, სად კვეთს L_1 მართობი უშუალოდ $\mathbf{e}_1$ ღერძს. $\mathbf{e}_1$ ღერძზე მდებარე ნებისმიერი ვექტორი ჩაიწერება როგორც $\mu \mathbf{e}_1$, სადაც $\mu \in \mathbb{R}$ სკალარული პარამეტრია.

ა) გადაკვეთის პირობა:

$$\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}^2 = \mu \mathbf{e}_1 \quad (\text{ჩ.37})$$

ბ) სკალარული გამრავლება $\mathbf{e}_1$ -ზე: გავამრავლოთ ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად $\mathbf{e}_1$ ვექტორზე:

$$(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}^2) \cdot \mathbf{e}_1 = (\mu \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1 \quad (\text{ჩ.38})$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda(\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1) = \mu(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) \quad (\text{ჩ.39})$$

გ) ძირითადი იგივეობების გამოყენება:

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 = x_1$ (კოვარიანტული კოორდინატის განმარტება);
- $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ (დუალიზმის პირობა);
- $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = g_{11}$ (მეტრიკული ტენზორის კომპონენტი / სიგრძის კვადრატი).

დ) პარამეტრის პოვნა:

$$x_1 + 0 = \mu g_{11} \implies \mu = \frac{x_1}{g_{11}} \quad (\text{ჩ.40})$$

ე) გეგმილის ფიზიკური სიგრძე (P_1): გადაკვეთის ვექტორია $\mathbf{p}_1 = \mu \mathbf{e}_1$. მისი მოდული (სიგრძე) იქნება:

$$P_1 = |\mathbf{p}_1| = |\mu \mathbf{e}_1| = \mu |\mathbf{e}_1| = \frac{x_1}{g_{11}} \sqrt{g_{11}} = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}} \quad (\text{ჩ.41})$$

3. გადაკვეთა დუალურ $\mathbf{e}^1$ ღერძთან (x_1 კოორდინატი)

ახლა ვიპოვოთ, სად კვეთს ეს იგივე მართობი L_1 დუალურ $\mathbf{e}^1$ ღერძს. $\mathbf{e}^1$ ღერძზე მდებარე ნებისმიერი ვექტორი ჩაიწერება როგორც $\kappa \mathbf{e}^1$ (სადაც $\kappa \in \mathbb{R}$ სკალარია).

ა) გადაკვეთის პირობა:

$$\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}^2 = \kappa \mathbf{e}^1 \quad (\text{ჩ.42})$$

ბ) **სკალარული გამრავლება $\mathbf{e}_1$ -ზე:** გაგამრავლოთ ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად $\mathbf{e}_1$ ვექტორზე:

$$(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{e}^2) \cdot \mathbf{e}_1 = (\kappa \mathbf{e}^1) \cdot \mathbf{e}_1 \quad (\text{I.43})$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 + \lambda(\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1) = \kappa(\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1) \quad (\text{I.44})$$

გ) **ძირითადი იგივეობებისა და დუალიზმის გამოყენება:**

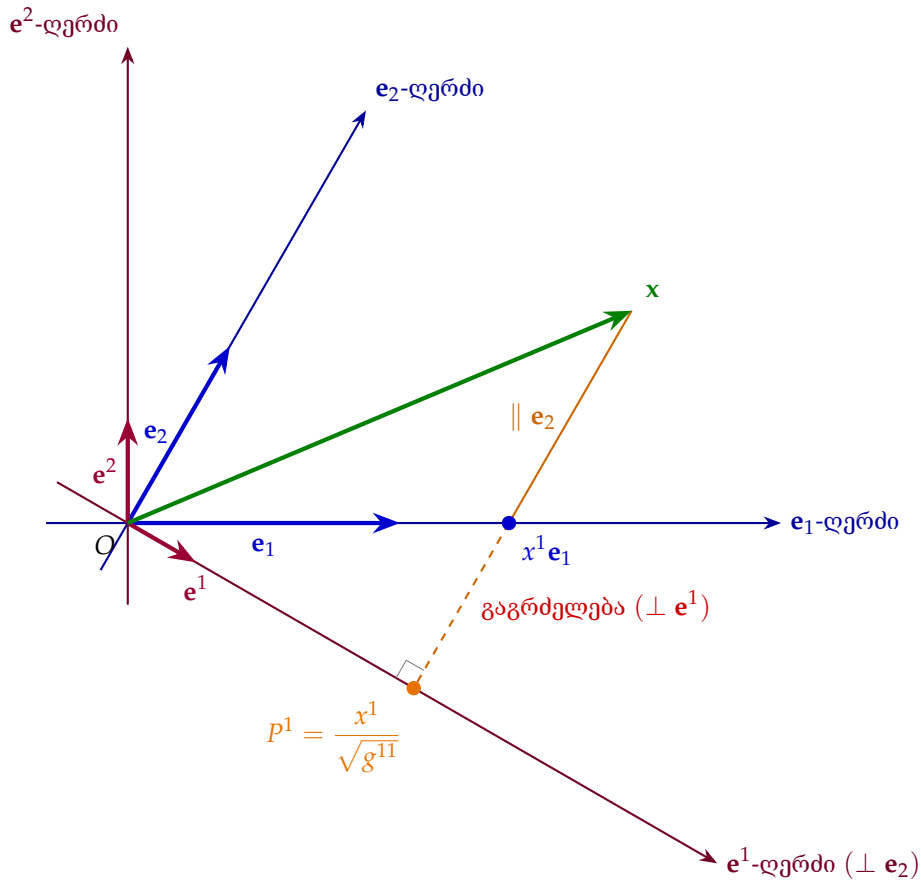
- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 = x_1$;
- $\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$;
- $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$ (რადგან დუალური ბაზისის განმარტებით $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i$).

დ) **კოორდინატის მიღება:**

$$x_1 + 0 = \kappa \cdot 1 \implies \kappa = x_1 \quad (\text{I.45})$$

ამრიგად, გადაკვეთის ვექტორი დუალურ ღერძზე არის ზუსტად $x_1 \mathbf{e}^1$, რაც ამტკიცებს, რომ დუალურ ღერძზე მიღებული კოეფიციენტი არის სწორედ კოგარიანტული კოორდინატი x_1 .

ჩ.3.3 კორენევის წიგნიდან მეორე აგება (e_2 -ის პარალელური წრფის გაგრძელება დუალურ ღერძზე)



სურ ჩ.6: მეორე დუალური თეორემა: e_2 -ის პარალელური წრფე კვეთს e_1 ღერძს $x^1 e_1$ წერტილში, ხოლო დუალურ e^1 ღერძთან მართობული გადაკვეთისას იძლევა P^1 ორთოგონალურ გეგმილს.

კორენევის მეორე თეორემის დამტკიცება (e_2 -ის პარალელური წრფე)

ამ აგების გეომეტრიული არსი მდგომარეობს x წერტილიდან e_2 ღერძის პარალელური L_2 წრფის გატარებასა და ამ წრფის გადაკვეთის პოვნაში როგორც პირდაპირ (e_1), ისე დუალურ (e^1) ღერძებთან.

დუალური ბაზისის განმარტებით $e^1 \cdot e_2 = 0$, რაც ნიშნავს, რომ e_2 ღერძი (და შესაბამისად, მისი ნებისმიერი პარალელური წრფე) ავტომატურად მართობულია დუალური e^1 ღერძის.

x წერტილზე გამავალი და e_2 ღერძის პარალელური წრფის განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$L_2 = \{x + \mu e_2 \mid \mu \in \mathbb{R}\} \quad (\text{I.46})$$

1. გადაკვეთა პირდაპირ e_1 ღერძთან (x^1 კონტრავარიანტული კოორდინატი)

ვიპოვოთ, სად კვეთს ეს L_2 წრფე პირდაპირ e_1 ღერძს. პირდაპირ ღერძზე მდებარე ნებისმიერი წერტილი (ვექტორი) ჩაიწერება როგორც αe_1 (სადაც $\alpha \in \mathbb{R}$).

ა) გადაკვეთის პირობა:

$$x + \mu e_2 = \alpha e_1 \quad (\text{I.47})$$

ბ) x ვექტორის დაშლა პირდაპირ ბაზისში: ჩავსვათ $x = x^1 e_1 + x^2 e_2$:

$$(x^1 e_1 + x^2 e_2) + \mu e_2 = \alpha e_1 \quad (\text{I.48})$$

$$x^1 e_1 + (x^2 + \mu) e_2 = \alpha e_1 \quad (\text{I.49})$$

გ) საბაზისო ვექტორების წრფივი დამოუკიდებლობა: რადგან e_1 და e_2 წრფივად დამოუკიდებელი ვექტორებია, შესაბამისი კოეფიციენტები უნდა გატოლდეს:

$$\alpha = x^1, \quad \mu = -x^2 \quad (\text{I.50})$$

ამრიგად, გადაკვეთის წერტილი პირდაპირ ღერძზე არის $x^1 e_1$, რაც ამტკიცებს, რომ პირდაპირი ღერძის პარალელური წრფით მიიღება სწორედ კონტრავარიანტული კოორდინატი x^1 .

2. გადაკვეთა დუალურ e^1 ღერძთან (P^1 ორთოგონალური გეგმილი)

ახლა ვიპოვოთ, სად კვეთს ამავე L_2 წრფის გაგრძელება დუალურ e^1 ღერძს. დუალურ ღერძზე მდებარე ნებისმიერი ვექტორი ჩაიწერება როგორც βe^1 (სადაც $\beta \in \mathbb{R}$).

ა) გადაკვეთის პირობა:

$$x + \mu e_2 = \beta e^1 \quad (\text{I.51})$$

ბ) სკალარული გამრავლება დუალურ e^1 ვექტორზე: გავამრავლოთ ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად e^1 -ზე:

$$(x + \mu e_2) \cdot e^1 = (\beta e^1) \cdot e^1 \quad (\text{I.52})$$

$$x \cdot e^1 + \mu(e_2 \cdot e^1) = \beta(e^1 \cdot e^1) \quad (\text{I.53})$$

გ) დუალური ბაზისის თვისებების გამოყენება:

- $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^1 = x^1$ (კონტრავარიანტული კოორდინატის განმარტება);
- $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}^1 = 0$ (ორთოგონალობა დუალურ ბაზისთან);
- $\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^1 = g^{11}$ (კონტრავარიანტული მეტრიკული ტენზორის კომპონენტი).

დ) β პარამეტრის პოვნა:

$$x^1 + 0 = \beta g^{11} \implies \beta = \frac{x^1}{g^{11}} \quad (\text{ჩ.54})$$

ე) გადაკვეთის ვექტორი და ფიზიკური სიგრძე (P^1): გადაკვეთის ვექტორი დუალურ ღერძზე არის $\mathbf{p}^1 = \frac{x^1}{g^{11}} \mathbf{e}^1$. რადგან L_2 წრფე მართობულია $\mathbf{e}^1$ ღერძის, ამ ვექტორის სიგრძე წარმოადგენს ორთოგონალურ გეგმილს (P^1) დუალურ ღერძზე:

$$P^1 = |\mathbf{p}^1| = \left| \frac{x^1}{g^{11}} \mathbf{e}^1 \right| = \frac{x^1}{g^{11}} |\mathbf{e}^1| = \frac{x^1}{g^{11}} \sqrt{g^{11}} = \frac{x^1}{\sqrt{g^{11}}} \quad (\text{ჩ.55})$$

- კონტრავარიანტული x^i კოორდინატები: მიიღება პირდაპირი ღერძების პარალელური წრფეებით პირდაპირ ბაზისში (პარალელოგრამის წესი).
- კოვარიანტული x_i კოორდინატები: მიიღება დუალური ღერძების პარალელური წრფეებით (ანუ პირდაპირი ღერძების მართობეობით) დუალურ ბაზისში.
- პირდაპირი ფიზიკური კოორდინატები $P_i = \frac{x_i}{\sqrt{g^{ii}}}$: მიიღება პირდაპირ ღერძებზე მართობების დაშვებით.
- დუალური ფიზიკური კოორდინატები $P^i = \frac{x^i}{\sqrt{g^{ii}}}$: მიიღება დუალურ ღერძებზე მართობების დაშვებით (რაც იგივეა, რაც პირდაპირი ღერძების პარალელური წრფეების გაგრძელება დუალურ ღერძებამდე).

ჩ.4 ვექტორის ფიზიკური კოორდინატები და მათ შორის კავშირები

როგორც აღნიშნულია წიგნში Б. Г. Коренев, «Введение в тензорное исчисление», ტენზორულ კომპონენტებს x^i და x_i არანორმირებულ ბაზისში შეიძლება ჰქონდეთ განსხვავებული ფიზიკური განზომილება. ამიტომ შემოჰყავთ ფიზიკური კოორდინატები (მდგენელები), რომლებიც ზომავენ ვექტორს ერთეულოვან ორტებში.

1.4.1 კავშირი ფიზიკურ კოვარიანტულ (x_i^*) და კოვარიანტულ (x_i) კომპონენტებს შორის

განმარტება და დამტკიცება:

1. პირდაპირი ბაზისური ვექტორის $\mathbf{e}_i$ სიგრძე მეტრიკული ტენზორის მეშვეობით არის:

$$|\mathbf{e}_i| = \sqrt{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i} = \sqrt{g_{ii}} \quad (1.56)$$

2. ამ ღერძის გასწვრივ მიმართული ერთეულოვანი ორტი (ფიზიკური ბაზისური ვექტორი) განისაზღვრება როგორც:

$$\mathbf{e}_i^* = \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (1.57)$$

3. ფიზიკური კოვარიანტული კოორდინატი x_i^* წარმოადგენს $\mathbf{x}$ ვექტორის ორთოგონალურ გეგმილს ამ ერთეულოვან ორტზე, ანუ მათ სკალარულ ნამრავლს:

$$x_i^* = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i^* = \mathbf{x} \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (1.58)$$

4. რადგან ტენზორული კოვარიანტული კოორდინატის განმარტებით $\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = x_i$, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$x_i^* = \frac{x_i}{\sqrt{g_{ii}}} \iff x_i = x_i^* \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{ჯამების გარეშე}) \quad (1.59)$$

1.4.2 კავშირი ფიზიკურ კონტრავარიანტულ (x^{*i}) და კონტრავარიანტულ (x^i) კომპონენტებს შორის

დამტკიცება:

1. $\mathbf{x}$ ვექტორი შეგვიძლია დავშალოთ როგორც ტენზორული x^i , ისე ფიზიკური x^{*i} მდგენელების მიხედვით:

$$\mathbf{x} = \sum_i x^i \mathbf{e}_i = \sum_i x^{*i} \mathbf{e}_i^* \quad (1.60)$$

2. ჩავსვათ ფიზიკური ორტის გამოსახულება $\mathbf{e}_i^* = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}}$ მწკრივში:

$$\mathbf{x} = \sum_i x^{*i} \left(\frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) = \sum_i \left(\frac{x^{*i}}{\sqrt{g_{ii}}} \right) \mathbf{e}_i \quad (1.61)$$

3. რადგან ბაზისურ ვექტორებში დაშლა ერთადერთია, ტენზორული x^i და ფიზიკური x^{*i} კოორდინატების კოეფიციენტების გატოლებით $\mathbf{e}_i$ -ს წინ მივიღებთ:

$$x^i = \frac{x^{*i}}{\sqrt{g_{ii}}} \iff x^{*i} = x^i \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{ჯამების გარეშე}) \quad (1.62)$$

ჩ.4.3 კავშირი ფიზიკურ კოვარიანტულ (x_i^*) და კონტრავარიანტულ (x^i) კომპონენტებს შორის

დამტკიცება:

1. გამოვიყენოთ ფიზიკური კოვარიანტული კოორდინატის გამოსახულება:

$$x_i^* = \frac{x_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (\text{ჩ.63})$$

2. ტენზორულ ინდექსთა დაწევის წესის თანახმად, კოვარიანტული კომპონენტი x_i გამოსახება კონტრავარიანტული კომპონენტებით და მეტრიკული ტენზორით:

$$x_i = \sum_j g_{ij} x^j \quad (\text{ჩ.64})$$

3. ამ გამოსახულების ჩასმით მივიღებთ პირდაპირ კავშირს:

$$x_i^* = \frac{\sum_j g_{ij} x^j}{\sqrt{g_{ii}}} = \sum_j \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}}} x^j \quad (\text{ჩ.65})$$

ჩ.4.4 კავშირი ფიზიკურ კონტრავარიანტულ (x^{*i}) და კოვარიანტულ (x_i) კომპონენტებს შორის

დამტკიცება:

1. გამოვიყენოთ ფიზიკური კონტრავარიანტული კოორდინატის გამოსახულება:

$$x^{*i} = x^i \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{ჩ.66})$$

2. ტენზორულ ინდექსთა აწევის წესის თანახმად, კონტრავარიანტული კომპონენტი x^i გამოსახება კოვარიანტული კომპონენტებითა და შუღლღებული (ინვერსიული) მეტრიკული ტენზორით g^{ij} :

$$x^i = \sum_j g^{ij} x_j \quad (\text{ჩ.67})$$

3. ამ გამოსახულების ჩასმით მივიღებთ:

$$x^{*i} = \left(\sum_j g^{ij} x_j \right) \sqrt{g_{ii}} = \sum_j g^{ij} \sqrt{g_{ii}} x_j \quad (\text{ჩ.68})$$

1.4.5 კავშირი ფიზიკურ კოვარიანტულ (x_i^*) და ფიზიკურ კონტრაგარიანტულ (x^{*j}) კოორდინატებს შორის

ზოგადი შემთხვევის დამტკიცება:

1. მე-3 პუნქტის ფორმულაში $x_i^* = \sum_j \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}}} x^j$ ჩავსვათ მე-2 პუნქტიდან ცნობილი დამოკიდებულება $x^j = \frac{x^{*j}}{\sqrt{g_{jj}}}$:

$$x_i^* = \sum_j \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}}} \left(\frac{x^{*j}}{\sqrt{g_{jj}}} \right) = \sum_j \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}} x^{*j} \quad (1.69)$$

2D მახვილკუთხა სისტემის კერძო შემთხვევა:

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი სისტემა, სადაც ბაზისური ვექტორები ერთეულოვანი სიგრძისაა ($g_{11} = 1, g_{22} = 1$) და მათ შორის კუთხე არის α , რის გამოც $g_{12} = g_{21} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \cos \alpha$.

1. $i = 1$ -ისთვის:

$$x_1^* = \frac{g_{11}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{11}}} x^{*1} + \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}} x^{*2} = \frac{1}{1 \cdot 1} x^{*1} + \frac{\cos \alpha}{1 \cdot 1} x^{*2} = x^{*1} + x^{*2} \cos \alpha \quad (1.70)$$

2. $i = 2$ -ისთვის:

$$x_2^* = \frac{g_{21}}{\sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{11}}} x^{*1} + \frac{g_{22}}{\sqrt{g_{22}} \sqrt{g_{22}}} x^{*2} = \frac{\cos \alpha}{1 \cdot 1} x^{*1} + \frac{1}{1 \cdot 1} x^{*2} = x^{*1} \cos \alpha + x^{*2} \quad (1.71)$$

1.4.6 კოვარიანტულ კოორდინატებსა და ორთოგონალურ გეგმილს შორის კავშირი

მნიშვნელოვანია ერთმანეთისგან მკაფიოდ განვასხვავოთ სამი სიდიდე:

1. ტენზორული კოვარიანტული კოორდინატი (x_1): განმარტებით არის $\mathbf{x}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი კოვარიანტულ საბაზისო ვექტორზე:

$$x_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1 \quad (1.72)$$

ამ სიდიდეს ზოგად შემთხვევაში არ აქვს სიგრძის განზომილება და დამოკიდებულია $\mathbf{e}_1$ ვექტორის მასშტაბზე.

2. ორთოგონალური გეგმილი პირდაპირ ღერძზე (P_1): წარმოადგენს $\mathbf{x}$ ვექტორის მართობულ გეგმილს $\mathbf{e}_1$ ღერძზე:

$$P_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1^* = \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|} = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}} \quad (1.73)$$

3. **ფიზიკური კოვარიანტული კოორდინატი (x_1^*):** განმარტებით არის $\mathbf{x}$ ვექტორის სკალარული ნამრავლი ერთეულოვან (ფიზიკურ) კოვარიანტულ ბაზისზე $\mathbf{e}_1^*$:

$$x_1^* = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1^* = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}} \quad (\text{ჩ.74})$$

დასკვნა: ფიზიკური კოვარიანტული კოორდინატი x_1^* და პირდაპირ ღერძზე დაშვებული ორთოგონალური გეგმილი P_1 **ზუსტად იდენტური სიდიდეებია:**

$$x_1^* \equiv P_1 = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}} \quad (\text{ჩ.75})$$

სწორედ ამიტომ ეწოდება x_1^* -ს „ფიზიკური კოორდინატი“ — ის უშუალოდ ზომავს ვექტორის გეომეტრიულ (ორთოგონალურ) გეგმილს შესაბამის ღერძზე. *შენიშვნა:* განსხვავებით კოვარიანტული შემთხვევისგან, კონტრავარიანტულ მხარეს ფიზიკური კონტრავარიანტული კოორდინატი $x^{*1} = x^1 \sqrt{g_{11}}$ (პარალელელოგრამის გვერდის სიგრძე) და ღუალურ ღერძზე ორთოგონალური გეგმილი $P^1 = \frac{x^1}{\sqrt{g^{11}}}$ ირიბკუთხა სისტემაში ერთმანეთს არ ემთხვევა ($P^1 = x^{*1} \sin \phi$).

ჩ.4.7 კონტრავარიანტულ კოორდინატებსა და ღუალურ ღერძზე გეგმილს შორის კავშირი

კოვარიანტული შემთხვევისგან განსხვავებით, კონტრავარიანტულ მხარეს ფიზიკური კოორდინატი და ღუალურ ღერძზე დაშვებული ორთოგონალური გეგმილი ირიბკუთხა სისტემაში ერთმანეთს არ ემთხვევა. განვიხილოთ სამი შესაბამისი სიდიდე:

1. **ტენზორული კონტრავარიანტული კოორდინატი (x^1):** წარმოადგენს $\mathbf{x}$ ვექტორის კომპონენტს პირდაპირ ბაზისში გაშლისას (პარალელელოგრამის წესით):

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 \quad (\text{ჩ.76})$$

2. **ფიზიკური კონტრავარიანტული კოორდინატი (x^{*1}):** წარმოადგენს პირდაპირ $\mathbf{e}_1$ ღერძზე მიღებული კოორდინატული ვექტორის ($x^1 \mathbf{e}_1$) ფიზიკურ სიგრძეს (პარალელელოგრამის გვერდის სიგრძეს):

$$x^{*1} = x^1 |\mathbf{e}_1| = x^1 \sqrt{g_{11}} \quad (\text{ჩ.77})$$

3. **ორთოგონალური გეგმილი ღუალურ ღერძზე (P^1):** წარმოადგენს $\mathbf{x}$ ვექტორის მართობულ გეგმილს ღუალურ $\mathbf{e}^1$ ღერძზე, ანუ სკალარულ ნამრავლს

$$\text{დუალური ღერძის ერთეულოვან ვექტორზე } \mathbf{e}^{*1} = \frac{\mathbf{e}^1}{|\mathbf{e}^1|} = \frac{\mathbf{e}^1}{\sqrt{g^{11}}}:$$

$$P^1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^{*1} = \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{e}^1}{\sqrt{g^{11}}} = \frac{x^1}{\sqrt{g^{11}}} \quad (1.78)$$

მათემატიკური კავშირი და დასკვნა: რადგან ირიბკუთხა სისტემაში (ϕ კუთხით საბაზისო ღერძებს შორის) კონტრაგარიანტული მეტრიკული ელემენტია $\sqrt{g^{11}} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}} \sin \phi}$, მივიღებთ:

$$P^1 = \frac{x^1}{\sqrt{g^{11}}} = x^1 \sqrt{g_{11}} \sin \phi = x^{*1} \sin \phi \quad (1.79)$$

ამრიგად, ზოგად ირიბკუთხა სისტემაში ($\phi \neq 90^\circ$):

$$P^1 \neq x^{*1} \quad (1.80)$$

გეომეტრიული შინაარსი:

- x^{*1} არის პირდაპირი ღერძის გასწვრივ აგებული კოორდინატული პარალელოგრამის გვერდის ფიზიკური სიგრძე;
- P^1 არის დუალურ $\mathbf{e}^1$ ღერძზე დაშვებული მართობული გვერდის სიგრძე.

შხოლოდ ორთოგონალურ კოორდინატთა სისტემაში ($\phi = 90^\circ \implies \sin \phi = 1$) ემთხვევა ეს ორი სიდიდე ერთმანეთს ($P^1 = x^{*1}$).

1.4.8 ზუთივე კოორდინატული და გეომეტრიული სიდიდის $(x_i, x^i, x_i^* \equiv P_i, x^{*i}, P^i)$ ექსპერიმენტული ინტერპრეტაცია

ირიბკუთხა (არაორთოგონალურ) კოორდინატთა სისტემაში ერთი და იმავე $\mathbf{x}$ ვექტორის აღსაწერად შემოდის 5 განსხვავებული სიდიდე. ორთოგონალურ სისტემაში ეს სიდიდეები წყვილ-წყვილად ემთხვევა ერთმანეთს, თუმცა ზოგად ირიბკუთხა სისტემაში ზუთივეს სრულიად განსხვავებული ფიზიკური და ექსპერიმენტული შინაარსი აქვს.

1. ტენზორული კოვარიანტული კოორდინატი (x_i)

- **მათემატიკური განმარტება:** $x_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1$.

- **გეომეტრიული შინაარსი:** ვექტორის სკალარული ნამრავლები პირდაპირ (არანორმირებულ) საბაზისო ვექტორებზე.
- **ექსპერიმენტული შინაარსი:** წმინდა მათემატიკური/ტენზორული სიდიდეა. რადგან $\mathbf{e}_1$ საბაზისო ვექტორს ზოგად მრუდწირულ კოორდინატებში შეიძლება ჰქონდეს სიგრძის განზომილება (ან განზომილება საერთოდ არ ჰქონდეს), x_i უშუალოდ სახაზავით ან სენსორით არ იზომება, სანამ არ მოხდება მისი ნორმირება.

2. ტენზორული კონტრავარიანტული კოორდინატი (x^i)

- **მათემატიკური განმარტება:** $\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2$.
- **გეომეტრიული შინაარსი:** ვექტორის გაშლის უგანზომილებო ან მასშტაბირებული კოეფიციენტები პირდაპირ ბაზისში (პარალელოგრამის წესით).
- **ექსპერიმენტული შინაარსი:** წარმოადგენს ბადის უჯრედების უბრალო რაოდენობას (ნუმერაციას) კოორდინატულ ღერძზე. x_i -ს მსგავსად, ისიც უშუალო ფიზიკური სიგრძე არ არის, თუ ბაზისი ერთეულოვანი არ არის.

3. ფიზიკური კოვარიანტული კოორდინატი / პირდაპირ ღერძზე ორთოგონალური

გეგმილი ($x_i^* \equiv P_i$)

- **მათემატიკური განმარტება:** $x_1^* \equiv P_1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1^* = \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|} = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}}$.
- **გეომეტრიული შინაარსი:** $\mathbf{x}$ ვექტორის მართობული (ორთოგონალური) გეგმილის სიგრძე პირდაპირ $\mathbf{e}_1$ ღერძზე.
- **ექსპერიმენტული შინაარსი (პირდაპირი ორთოგონალური გაზომვა):** ეს არის სიდიდე, რასაც გაზომავს სტანდარტული 1D სენსორი (მაგ. ვოლტმეტრი ან აქსელერომეტრი), როდესაც მისი მგრძნობიარე ღერძი მიმართულია ზუსტად $\mathbf{e}_1$ პირდაპირი ღერძის გასწვრივ. ის ზომავს ვექტორის რეალურ გეომეტრიულ „ჩრდილს“ პირდაპირ ღერძზე.

4. ფიზიკური კონტრავარიანტული კოორდინატი (x^{*i})

- **მათემატიკური განმარტება:** $x^{*1} = x^1 |\mathbf{e}_1| = x^1 \sqrt{g_{11}}$.
- **გეომეტრიული შინაარსი:** პირდაპირი ღერძების გასწვრივ აგებული კოორდინატული პარალელოგრამის გვერდის ფიზიკური სიგრძე.

- **ექსპერიმენტული შინაარსი (იძულებითი ირიბი დატვირთვა):** ეს სიდიდე იზომება მაშინ, როდესაც ფიზიკური სისტემა იძულებულია იმოქმედოს უშუალოდ ირიბი ღერძის გასწვრივ. მაგალითად, მექანიკურ კონსტრუქციაში ირიბად განლაგებულ საყრდენ ღეროში (Strut) მოქმედი რეალური ჭიმვის/კუმშვის ძალა არის სწორედ x^{*1} .

5. ორთოგონალური გეგმილი დუალურ ღერძზე (P^i)

- **მათემატიკური განმარტება:** $P^1 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^{*1} = \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{e}^1}{|\mathbf{e}^1|} = \frac{x^1}{\sqrt{g^{11}}} = x^{*1} \sin \phi$.
- **გეომეტრიული შინაარსი:** $\mathbf{x}$ ვექტორის მართობული გეგმილის სიგრძე დუალურ $\mathbf{e}^1$ ღერძზე (ანუ $x^1 = \text{const}$ კოორდინატული სიბრტყის მართობულად).
- **ექსპერიმენტული შინაარსი (ზედაპირის პერპენდიკულარული ნაკადი):** ეს სიდიდე იზომება სენსორით, რომელიც დაყენებულია $x^1 = \text{const}$ კოორდინატული ზედაპირის მართობულად. ელექტროდინამიკაში P^1 განსაზღვრავს ველის ან დენის სრულ ნაკადს, რომელიც გადის კოორდინატულ საზღვარში.

ხუთივე სიდიდის ექსპერიმენტული შედარების ცხრილი

№	სიდიდე	გეომეტრიული სახე	ექსპერიმენტული/საინჟინრო შინაარსი
1	x_i	$\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$	ტენზორული კოვარიანტული ინდექსი (არანორმირებული სკალარული ნამრავლი).
2	x^i	$\mathbf{x}$ -ის კომპონენტი $\mathbf{e}_i$ -ში	ტენზორული კონტრაგარიანტული ინდექსი (ბადის უჯრედების რაოდენობა).
3	$x_i^* \equiv P_i$	$\frac{x_i}{\sqrt{g_{ii}}}$	პირდაპირი ღერძის გეგმილი: გაიზომება სენსორით, რომელიც მიმართულია უშუალოდ $\mathbf{e}_i$ ღერძის გასწვრივ.
4	x^{*i}	$x^i \sqrt{g_{ii}}$	ირიბი ღერძის კომპონენტი: იზომება უშუალოდ ირიბი ღერძის გასწვრივ მოქმედი რეალური ძალა/ველი.
5	P^i	$\frac{x^i}{\sqrt{g^{ii}}} = x^{*i} \sin \phi$	დუალური ღერძის გეგმილი: გაიზომება $x^i = \text{const}$ კოორდინატული ზედაპირის მართობულად დაყენებული სენსორით.

ცხრილი 1.1: ირიბკუთხა სისტემაში შესაძლო 5 გაზომვადი სიდიდის შედარება

მათემატიკური კავშირები სიდიდეებს შორის

ირიბკუთხეა ორგანზომილებიან სისტემაში, სადაც პირდაპირ ღერძებს შორის კუთხეა ϕ , სამართლიანია შემდეგი იდენტობები:

$$x_1^* \equiv P_1 = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}} \quad (\text{ჩ.81})$$

$$x^{*1} = x^1 \sqrt{g_{11}} \quad (\text{ჩ.82})$$

$$P^1 = \frac{x^1}{\sqrt{g^{11}}} = x^{*1} \sin \phi = \frac{P_1 - x_2^* \cos \phi}{\sin \phi} \quad (\text{ჩ.83})$$

მნიშვნელოვანი დასკვნა: მხოლოდ ორთოგონალურ სისტემაში ($\phi = 90^\circ \Rightarrow \sin \phi = 1, \cos \phi = 0$) გვაქვს:

$$x_1^* = P_1 = x_1^*, \quad \text{და} \quad P^1 = x^{*1} \quad (\text{ჩ.84})$$

ხოლო ზოგად ირიბკუთხეა სისტემაში ხუთივე სიდიდე დამოუკიდებელ მათემატიკურ და ექსპერიმენტულ როლს ასრულებს.

ჩ.5 გაზომვადობა არაორთოგონალურ საკოორდინატო სისტემაში

არაორთოგონალურ (დახრილ) საკოორდინატო სისტემებში მეტრიკული ტენზორის არადიაგონალური წევრები ნულისგან განსხვავდება ($g_{ij} \neq 0$, როცა $i \neq j$). ამის გამო, ფიზიკური კოვარიანტული კომპონენტი და ფიზიკური კონტრავარიანტული კომპონენტი ერთმანეთს აღარ ემთხვევა:

$$\frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}} \neq v^1 \sqrt{g_{11}}$$

ექსპერიმენტში ორივე სიდიდე რეალურად გაზომვადია, თუმცა ისინი პასუხობენ გაზომვის სრულიად განსხვავებულ გეომეტრიულ და ფიზიკურ მეთოდებს.

ჩ.5.1 ფიზიკური კოვარიანტული კომპონენტი (ორთოგონალური გეგმილი)

$$V_{(1)}^{\text{cov}} = \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}}$$

- გეომეტრიული აზრი: v ვექტორის წვერიდან e_1 ღერძზე დაშვებული მართობის (პერპენდიკულარის) ფუძემდებ არსებული მანძილი.

- **ექსპერიმენტული შინაარსი:** თუ ხელსაწყო (მაგალითად, სენსორი, ფოტოდეტექტორი ან წნევის მზომი) ზომავს ფიზიკური სიდიდის (ძალის, სიჩქარის, ველის) ჩრდილს / ორთოგონალურ პროექციას მოცემული ერთეულოვანი მიმართულებით ($\mathbf{e}_1^* = \mathbf{e}_1 / \sqrt{g_{11}}$), ის ზომავს ზუსტად ამ სიდიდეს:

$$V_{(1)}^{\text{cov}} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1^* = \mathbf{v} \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{\sqrt{g_{11}}} = \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}}$$

- **ტერმინოლოგია:** „ორთოგონალური გეგმილი“ ან „ფიზიკური კოვარიანტული კომპონენტი“.

1.5.2 ფიზიკური კონტრაგარიანტული კომპონენტი (პარალელური მდგენელი)

$$V_{(1)}^{\text{contra}} = v^1 \sqrt{g_{11}}$$

- **გეომეტრიული აზრი:** $\mathbf{v}$ ვექტორის დაშლისას დანარჩენი ღერძების პარალელურად, $\mathbf{e}_1$ ღერძზე ჩამოჭრილი მონაკვეთის ფიზიკური სიგრძე (პარალელოგრამის გვერდის სიგრძე).
- **ექსპერიმენტული შინაარსი:** თუ გაზომვა ხდება უშუალოდ დახრილი ბადის გასწვრივ (მაგალითად, კრისტალურ მესერში ატომური ღერძების გასწვრივ გადანაცვლება ან მექანიკურ კონსტრუქციაში დახრილი ღერძების გასწვრივ მოქმედი ძალები), იზომება ეს სიდიდე:

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2 + \dots = \left(v^1 \sqrt{g_{11}} \right) \mathbf{e}_1^* + \left(v^2 \sqrt{g_{22}} \right) \mathbf{e}_2^* + \dots$$

- **ტერმინოლოგია:** „პარალელური მდგენელის სიგრძე“ ან „ფიზიკური კონტრაგარიანტული კომპონენტი“.

1.5.3 მათემატიკური დამოკიდებულება და გადახრის სიდიდე

ორივე ფიზიკურ სიდიდეს შორის კავშირი უშუალოდ გამომდინარეობს ტენზორული თანაფარდობიდან $v_1 = \sum_j g_{1j} v^j$:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}} &= \frac{g_{11} v^1 + g_{12} v^2 + g_{13} v^3 + \dots}{\sqrt{g_{11}}} \\ &= v^1 \sqrt{g_{11}} + \sum_{j \neq 1} \frac{g_{1j}}{\sqrt{g_{11}}} v^j \end{aligned}$$

სადაც წევრი $\sum_{j \neq 1} \frac{g_{1j}}{\sqrt{g_{11}}} v^j$ წარმოადგენს საკოორდინატო სისტემის არაორთოგონალურობის ეფექტს (კუთხეების დახრილობის წვლილს გაზომვაში).

ცხრილი ჩ.2: ფიზიკური კომპონენტების შედარება არაორთოგონალურ სისტემაში

მაზასიათებელი	ფიზიკური $\left(\frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}}\right)$	კოვარიანტული	ფიზიკური კონტრავარიან- ტული ($v^1 \sqrt{g_{11}}$)
გეომეტრია	მართობული დაპროექტება ლერძზე	პარალელური დაშლა ბადის გასწვრივ	
ექსპერიმენტი	ვექტორის ლის/გეგმილის გაზომვა	ჩრდი- ბადის გასწვრივ მდგენელის გაზომვა	
ორთოგონალურში	უდრის $v^1 \sqrt{g_{11}}$ -ს	უდრის $\frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}}$ -ს	
არაორთოგონალურში	$\neq v^1 \sqrt{g_{11}}$	$\neq \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}}$	

ჩ.6 მეტრიკა ირიბკუთხა კოორდინატებში. ურთიერ- თშეუღლებული სისტემები და ფუნდამენტური ობიექტი

ჩ.6.1 ირიბკუთხა კოორდინატთა სისტემა და წერტილის მდებარეობის დაფიქსირება

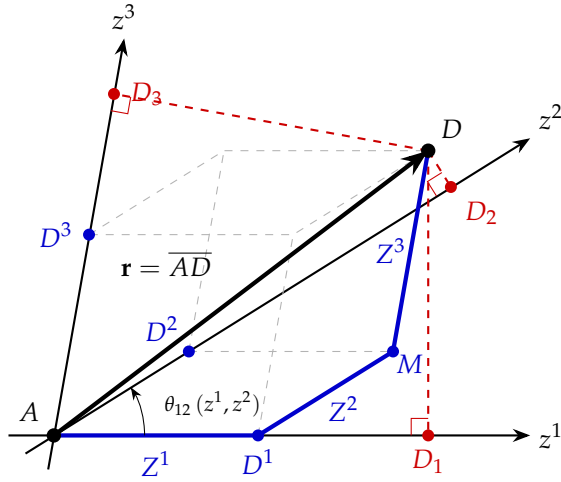
განვიხილოთ სამგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცე $\mathbb{E}^3$ ორთონორმირებული დეკარტის კოორდინატთა სისტემით $Ox^1x^2x^3$. დავუშვათ, $A(X^1, X^2, X^3)$ წერტილ-ში აგებულია ირიბკუთხა კოორდინატთა სისტემა $Az^1z^2z^3$.

შემოვიღოთ შემდეგი სიდიდეები:

- **მასშტაბები (სკალირების ფაქტორები):** $B_k > 0$ წარმოადგენს სივრცის ერთეულის მასშტაბს Az^k ღერძების გასწვრივ (B_k -ს აქვს სივრცის განზომილება).
- **მიმართულების კოსინუსები:** $\alpha_k^i = \cos(x^i, z^k)$ არის კუთხის კოსინუსი დეკარტის x^i ღერძსა და ირიბკუთხა z^k ღერძს შორის.

ნებისმიერი $D(x^1, x^2, x^3)$ წერტილის მდებარეობა A საწყისის მიმართ განისაზღვრება რადიუს-ვექტორით $\mathbf{r} = \overline{AD}$. სივრცეში D წერტილის პოზიცია ირიბკუთხა სისტემაში შეიძლება დაფიქსირდეს ორი გეომეტრიული წესით:

1. **ირიბი (პარალელური) წესით:** D წერტილზე გავავლებთ კოორდინატული სიბრტყეების პარალელურ სიბრტყეებს. ისინი ირიბკუთხა ღერძებს გადაკვეთენ D^k წერტილებში. AD^k მონაკვეთის სიგრძეს (სიგრძის ერთეულებში) აღვნიშნავთ Z^k -ით.
2. **ორთოგონალური (მართობული) წესით:** D წერტილზე გავავლებთ კოორდინატული ღერძების მართობულ სიბრტყეებს. ისინი ღერძებს გადაკვეთენ D_k წერტილებში. AD_k მონაკვეთის სიგრძეს (ორთოგონალურ გეგმილს) აღვნიშნავთ Z_k -ით.



სურ. 1.7: AD^1MD სივრცული ტეხილი მარჯვენა ირიბკუთხა კოორდინატებში, ირიბი კომპონენტები (D^1, D^2, D^3) და ორთოგონალური გეგმილები (D_1, D_2, D_3) მართი კუთხის აღნიშვნებით.

1.6.2 გარდაქმნის მატრიცა β_k^i და მეტრიკული ტენზორი g_{ik}

უგანზომილო ირიბკუთხა კოორდინატები z^k განისაზღვრება მასშტაბების მეშვეობით:

$$Z^k = B_k z^k \quad \Rightarrow \quad z^k = \frac{Z^k}{B_k} \quad (1.85)$$

დეკარტის x^i კოორდინატებსა და ირიბკუთხა z^k კოორდინატებს შორის კავშირი მოიცემა ფორმულით:

$$x^i - X^i = \alpha_k^i Z^k = \alpha_k^i B_k z^k = \beta_k^i z^k \quad (1.86)$$

სადაც შემოღებულია გარდაქმნის მატრიცა β_k^i :

$$\beta_k^i \equiv \alpha_k^i B_k = \begin{pmatrix} B_1 \alpha_1^1 & B_2 \alpha_2^1 & B_3 \alpha_3^1 \\ B_1 \alpha_1^2 & B_2 \alpha_2^2 & B_3 \alpha_3^2 \\ B_1 \alpha_1^3 & B_2 \alpha_2^3 & B_3 \alpha_3^3 \end{pmatrix} \quad (\text{ჩ.87})$$

რადიუს-ვექტორის სიგრძის კვადრატია $r^2 = (x^i - X^i)(x^i - X^i)$ იწერება შემდეგნაირად:

$$r^2 = \beta_s^i z^s \cdot \beta_k^i z^k = (\beta_s^i \beta_k^i) z^s z^k = g_{sk} z^s z^k \quad (\text{ჩ.88})$$

სადაც განმარტებულია კოვარიანტული მეტრიკული ტენზორი g_{ik} :

$$g_{ik} \equiv \beta_i^s \beta_k^s = \sum_{s=1}^3 \beta_i^s \beta_k^s \quad (\text{ჩ.89})$$

მეტრიკული ტენზორის ელემენტების გეომეტრიული შინაარსი:

$$g_{kk} = \beta_k^s \beta_k^s = B_k^2 \implies B_k = \sqrt{g_{kk}} \quad (\text{ჩ.90})$$

$$g_{ik} = B_i B_k \cos \theta_{ik} = \sqrt{g_{ii} g_{kk}} \cos \theta_{ik} \quad (i \neq k) \quad (\text{ჩ.91})$$

მეტრიკული ტენზორის დეტერმინანტი $g \equiv \det(g_{ik}) = |\beta_k^s|^2$ წარმოადგენს ბაზისურ ვექტორებზე აგებული პარალელეპიპედის მოცულობის კვადრატს:

$$\sqrt{g} = |\beta_k^s| = e_{pqr} \beta_1^p \beta_2^q \beta_3^r = \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3) \quad (\text{ჩ.92})$$

ჩ.6.3 კავშირი ფიზიკურ მონაკვეთებსა (Z^i) და კონტრაგარიანტულ კოორდინატებს (z^i) შორის

სივრცული ტეხილის AD^1MD გეომეტრიული განხილვისას მნიშვნელოვანია ერთმანეთისგან გავანსხვავოთ კონტრაგარიანტული კოორდინატები (z^i) და ფიზიკური მონაკვეთების სიგრძეები (Z^i), რომლებიც ირიბკუთხა ღერძების გასწვრივ არის გადაზომილი ($Z^1 = |\overline{AD^1}|$, $Z^2 = |\overline{D^1M}|$, $Z^3 = |\overline{MD}|$).

ვთქვათ, z^i ირიბკუთხა საკოორდინატო ღერძების გასწვრივ მიმართულია საბაზისო ვექტორები $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$). ამ ვექტორების სიგრძეების კვადრატები ემთხვევა მეტრიკული ტენზორის დიაგონალურ ელემენტებს:

$$|\mathbf{e}_i| = \sqrt{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i} = \sqrt{g_{ii}} \quad (\text{არაა აჯამვა } i \text{ ინდექსით}). \quad (\text{ჩ.93})$$

თუ განვმარტავთ z^i ღერძების გასწვრივ მიმართულ ერთეულოვან ვექტორებს $\mathbf{n}_i$:

$$\mathbf{e}_i^* = \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}}, \quad (\text{ჩ.94})$$

მაშინ რადიუს-ვექტორი $\mathbf{r} = \overline{AD}$ შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი განსხვავებული სახით:

1. საბაზისო ვექტორების საშუალებით (კონტრავარიანტული კოორდინატებით):

$$\mathbf{r} = z^1 \mathbf{e}_1 + z^2 \mathbf{e}_2 + z^3 \mathbf{e}_3 = \sum_{i=1}^3 z^i \mathbf{e}_i, \quad (1.95)$$

2. ერთეულოვანი ვექტორების საშუალებით (ფიზიკური სიგრძეებით Z^i):

$$\mathbf{r} = Z^1 \mathbf{e}^*_1 + Z^2 \mathbf{e}^*_2 + Z^3 \mathbf{e}^*_3 = \sum_{i=1}^3 Z^i \mathbf{e}^*_i. \quad (1.96)$$

შევიტანოთ $\mathbf{e}^*_i$ -ს გამოსახულება მეორე ტოლობაში:

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^3 Z^i \left(\frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{Z^i}{\sqrt{g_{ii}}} \right) \mathbf{e}_i. \quad (1.97)$$

(3) და (5) გამოსახულებების შედარებით უშუალოდ მივიღებთ კავშირს კოორდინატებსა და ფიზიკურ სიგრძეებს შორის:

$$z^i = \frac{Z^i}{\sqrt{g_{ii}}} \iff Z^i = z^i \sqrt{g_{ii}} \quad (i\text{-ს მიხედვით აჯამვა არაა}). \quad (1.98)$$

კერძოდ, AD^1MD ტეხილის თითოეული მონაკვეთისათვის გვექნება:

$$\begin{aligned} Z^1 &= z^1 \sqrt{g_{11}}, \\ Z^2 &= z^2 \sqrt{g_{22}}, \\ Z^3 &= z^3 \sqrt{g_{33}}. \end{aligned} \quad (1.99)$$

შენიშვნა: იმ შემთხვევაში, თუ საბაზისო ვექტორები თავიდანვე ერთეულოვანი სიგრძისაა ($|\mathbf{e}_i| = 1$, ანუ $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$), მაშინ ფიზიკური მონაკვეთების სიგრძეები და კონტრავარიანტული კოორდინატები ზუსტად ემთხვევა ერთმანეთს: $Z^i = z^i$. ზოგად შემთხვევაში კი მეტრიკული ტენზორის g_{ii} ელემენტები ასრულებენ მასშტაბური კოეფიციენტების (მასშტაბური მამრავლების) როლს.

1.6.4 კოვარიანტული კომპონენტების z_i გეომეტრიული გამოყვანა

გამოვიყვანოთ კავშირი კოვარიანტულ კომპონენტებსა (z_i) და კონტრავარიანტულ კოორდინატებს (z^k) შორის ორთოგონალური გვემძლეების მეშვეობით.

განვიხილოთ AD^1MD ტეხილი სივრცეში, სადაც AD^1 არის z^1 ღერძის გასწვრივ, D^1M — z^2 -ის გასწვრივ, ხოლო MD — z^3 -ის გასწვრივ. ამ ტეხილის ორთოგონალური პროექცია z^1 ღერძზე იძლევა $AD_1 \equiv Z_1$ მონაკვეთს:

$$Z_1 = Z^1 \cos(0) + Z^2 \cos \theta_{12} + Z^3 \cos \theta_{13} = Z^1 + Z^2 \cos \theta_{12} + Z^3 \cos \theta_{13} \quad (\text{ჩ.100})$$

გამოვსახოთ Z^k უგანზომილო კოორდინატებით $Z^k = \sqrt{g_{kk}} z^k$:

$$Z_1 = \sqrt{g_{11}} z^1 + \sqrt{g_{22}} \cos \theta_{12} z^2 + \sqrt{g_{33}} \cos \theta_{13} z^3 \quad (\text{ჩ.101})$$

განვმარტოთ ქვედა (კოვარიანტული) კოორდინატი z_1 როგორც $z_1 \equiv B_1 Z_1 = \sqrt{g_{11}} Z_1$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{g_{11}} \left(\sqrt{g_{11}} z^1 + \sqrt{g_{22}} \cos \theta_{12} z^2 + \sqrt{g_{33}} \cos \theta_{13} z^3 \right) \\ &= g_{11} z^1 + \sqrt{g_{11} g_{22}} \cos \theta_{12} z^2 + \sqrt{g_{11} g_{33}} \cos \theta_{13} z^3 \\ &= g_{11} z^1 + g_{12} z^2 + g_{13} z^3 = g_{1k} z^k \end{aligned} \quad (\text{ჩ.102})$$

ზოგადი სახით, ნებისმიერი i ინდექსისთვის მივიღებთ ფუნდამენტურ ტენზორულ თანაფარდობას:

$$z_i = g_{ik} z^k \quad (\text{ჩ.103})$$

ხოლო ფიზიკური ორთოგონალური გეგმილი Z_i გამოითვლება ფორმულით:

$$Z_i = \frac{z_i}{B_i} = \frac{z_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{g_{ik} z^k}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (\text{ჩ.104})$$

ჩ.6.5 ვექტორის ოთხი წარმოდგენა

ვექტორის წარმოდგენის ოთხი ტიპის განმარტება

ნებისმიერი ვექტორის არაორთოგონალურ სივრცეში აღწერისას ვიყენებთ ოთხ შესაძლო კომპონენტს, რომლებიც ერთმანეთისგან გეომეტრიული შინაარსითა და განზომილებით განსხვავდებიან:

1. **ზედა კოორდინატული (კონტრავარიანტული) a^k (x^k):** წარმოადგენს უგანზომილო კოორდინატებს ირიბკუთხე ბაზისში. ის გვიჩვენებს, თუ „რამდენჯერ“ შეიცავს ვექტორი შესაბამის საბაზისო ვექტორს.
2. **ქვედა კოორდინატული (კოვარიანტული) a_k (x_k):** მათემატიკური (ტენზორული) სიდიდეა, რომელიც მიიღება მეტრიკული ტენზორით ინდექსის დაწევით ($a_k = g_{ki} a^i$) და აქვს ფართობის განზომილება ($[L^2]$).

3. **ირიბი ფიზიკური (კონტრაგარიანტული) A^k :** ვექტორის რეალური სიგრძობრივი მდგენელია ($[L]$ განზომილებით), რომელიც მიიღება საკოორდინატო ღერძების პარალელური დაშლით (პარალელოგრამის წესით).
4. **ორთოგონალური პროექციული (კოგარიანტული) A_k :** ვექტორის რეალური ფიზიკური სიგრძეა ($[L]$ განზომილებით), რომელიც მიიღება საკოორდინატო ღერძზე ვექტორის მართობული (ორთოგონალური) დაპროექტებით.

რას ნიშნავს „ირიბი ფიზიკური“ კომპონენტი?

ირიბი ფიზიკური კომპონენტი (A^k) პასუხობს ორ მთავარ კითხვას:

- **რატომ „ირიბი“?** ირიბკუთხა (არაორთოგონალურ) კოორდინატა სისტემაში ($\theta \neq 90^\circ$), როდესაც ვექტორს ვშლით ღერძებზე, ამას ვაკეთებთ დანარჩენი ღერძების პარალელური ხაზებით (პარალელოგრამის გვერდების გასწვრივ) და არა მართობებით. რადგან ღერძებს შორის კუთხე ირიბია, ამ დაშლით მიღებულ კომპონენტებს ეწოდება „ირიბი“.
- **რატომ „ფიზიკური“?** წმინდა ტენზორული კონტრაგარიანტული კომპონენტი a^k (x^k) ზშირად უგანზომილოა. ფიზიკური კომპონენტი A^k კი მიიღება მისი გამრავლებით საბაზისო ვექტორის რეალურ სიგრძეზე:

$$A^k = x^k \sqrt{g_{kk}} = x^k |e_k|$$

ამის წყალობით, A^k -ს აქვს სიგრძის ($[L]$, მეტრების) განზომილება, რაც გამოიყენება რეალურ ფიზიკურ გაზომვებში.

კომპონენტების შესაბამისობა ნახაზის წერტილებთან

ნახაზზე გამოსახული x ვექტორისთვის, ოთხივე ფიზიკური კომპონენტი შეესაბამება შემდეგ მონაკვეთებსა და წერტილებს:

1. ირიბი ფიზიკური კომპონენტები (ღურჯი წერტილები):

- $A^1 = |O \rightarrow x^1 e_1| = x^1 \sqrt{g_{11}}$ — მანძილი სათავიდან (O) e_1 ღერძზე მდებარე ღურჯ $x^1 e_1$ წერტილამდე (პარალელოგრამის პირველი გვერდის სიგრძე).
- $A^2 = |O \rightarrow x^2 e_2| = x^2 \sqrt{g_{22}}$ — მანძილი სათავიდან (O) e_2 ღერძზე მდებარე ღურჯ $x^2 e_2$ წერტილამდე (პარალელოგრამის მეორე გვერდის სიგრძე).

2. ორთოგონალური ფიზიკური კომპონენტები (წითელი წერტილები):

- $A_1 = |O \rightarrow P_1| = \frac{x_1}{\sqrt{g_{11}}}$ — მანძილი სათავიდან (O) e_1 ღერძზე მდებარე წითელ P_1 წერტილამდე (ვექტორის მართობული გეგმილი).
- $A_2 = |O \rightarrow P_2| = \frac{x_2}{\sqrt{g_{22}}}$ — მანძილი სათავიდან (O) e_2 ღერძზე მდებარე წითელ P_2 წერტილამდე (ვექტორის მართობული გეგმილი).

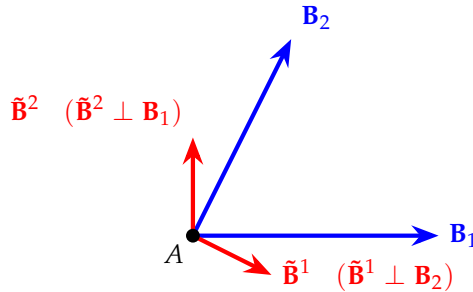
ცხრილი ჩ.4: ფიზიკური კომპონენტების შეჯამება ნახაზის მიხედვით

აღნიშვნა	ტიპი	ნახაზის წერტილი	გეომეტრიული შინაარსი
A^1	ირიბი ფიზიკური	$x^1 e_1$ (ღურჯი)	პარალელოგრამის გვერდი e_1 -ზე
A^2	ირიბი ფიზიკური	$x^2 e_2$ (ღურჯი)	პარალელოგრამის გვერდი e_2 -ზე
A_1	ორთოგონალური ფიზიკური	P_1 (წითელი)	მართობული პროექცია e_1 -ზე
A_2	ორთოგონალური ფიზიკური	P_2 (წითელი)	მართობული პროექცია e_2 -ზე

ჩ.6.6 ურთიერთშეუღლებული (დუალური) კოორდინატა სისტემა

შემოვიღოთ ახალი ბაზისი $\{\tilde{B}^1, \tilde{B}^2, \tilde{B}^3\}$, რომელიც აკმაყოფილებს დუალობის პირობას:

$$B_i \cdot \tilde{B}^k = \delta_i^k \quad (\text{ჩ.105})$$



სურ ჩ.8: პირველადი $\{B_1, B_2\}$ და შეუღლებული (დუალური) $\{\tilde{B}^1, \tilde{B}^2\}$ ბაზისები

შეუღლებული ბაზისური ვექტორები გამოითვლება ვექტორული ნამრავლით:

$$\tilde{B}^1 = \frac{B_2 \times B_3}{\sqrt{g}}, \quad \tilde{B}^2 = \frac{B_3 \times B_1}{\sqrt{g}}, \quad \tilde{B}^3 = \frac{B_1 \times B_2}{\sqrt{g}} \quad (\text{ჩ.106})$$

შეუღლებული სისტემის მასშტაბები $B^k \equiv \|\tilde{B}^k\|$ ტოლია:

$$B^1 = \frac{\sqrt{g_{22}g_{33}}}{\sqrt{g}} \sin \theta_{23}, \quad B^2 = \frac{\sqrt{g_{33}g_{11}}}{\sqrt{g}} \sin \theta_{31}, \quad B^3 = \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{\sqrt{g}} \sin \theta_{12} \quad (\text{ჩ.107})$$

შეუღლებული ბაზისური ვექტორები გამოითვლება ვექტორული ნამრავლით:

$$\mathbf{B}^1 = \frac{\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3}{\sqrt{g}}, \quad \mathbf{B}^2 = \frac{\mathbf{B}_3 \times \mathbf{B}_1}{\sqrt{g}}, \quad \mathbf{B}^3 = \frac{\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2}{\sqrt{g}} \quad (\text{1.108})$$

გამოყვანა 1.108: დუალობის პირობიდან $\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{B}^j = \delta_i^j$ გამომდინარე, დუალური $\mathbf{B}^1$ ვექტორი უნდა იყოს $\mathbf{B}_2$ და $\mathbf{B}_3$ ვექტორების მართობული. მაშასადამე, $\mathbf{B}^1$ უნდა იყოს $\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3$ ვექტორული ნამრავლის პროპორციული:

$$\mathbf{B}^1 = \alpha(\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3) \quad (\text{1.109})$$

პროპორციულობის α კოეფიციენტის საპოვნელად განვიხილოთ $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}^1 = 1$:

$$\mathbf{B}_1 \cdot (\alpha(\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3)) = \alpha \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3) = \alpha V = 1 \quad (\text{1.110})$$

სადაც $V = \mathbf{B}_1 \cdot (\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3)$ არის პირველადი ბაზისით შედგენილი პარალელეპედის მოცულობა, რომელიც, თავის მხრივ, მეტრული ტენზორის დეტერმინანტთან არის დაკავშირებული: $V = \sqrt{g}$. აქედან, $\alpha = 1/V = 1/\sqrt{g}$, რაც გვაძლევს $\mathbf{B}^1 = \frac{\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3}{\sqrt{g}}$. ანალოგიური მსჯელობა $\mathbf{B}^2$ და $\mathbf{B}^3$ ვექტორებისთვის იძლევა (1.108) ფორმულებს.

შეუღლებული სისტემის მასშტაბები $B^k \equiv \|\mathbf{B}^k\|$ ტოლია:

$$B^1 = \frac{\sqrt{g^{22}g^{33}}}{\sqrt{g}} \sin \theta_{23}, \quad B^2 = \frac{\sqrt{g^{33}g^{11}}}{\sqrt{g}} \sin \theta_{31}, \quad B^3 = \frac{\sqrt{g^{11}g^{22}}}{\sqrt{g}} \sin \theta_{12} \quad (\text{1.111})$$

გამოყვანა 1.111: განვიხილოთ B^1 მასშტაბის საპოვნელად $\mathbf{B}^1$ ვექტორის ნორმა:

$$B^1 = \|\mathbf{B}^1\| = \left\| \frac{\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3}{\sqrt{g}} \right\| = \frac{\|\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3\|}{\sqrt{g}} \quad (\text{1.112})$$

ვექტორული ნამრავლის ნორმა არის $\|\mathbf{B}_2 \times \mathbf{B}_3\| = B_2 B_3 \sin \theta_{23}$, სადაც $B_2 = \|\mathbf{B}_2\| = \sqrt{g^{22}}$ და $B_3 = \|\mathbf{B}_3\| = \sqrt{g^{33}}$. საბოლოოდ მივიღებთ:

$$B^1 = \frac{\sqrt{g^{22}g^{33}}}{\sqrt{g}} \sin \theta_{23} \quad (\text{1.113})$$

რაც ემთხვევა (62)-ს. ანალოგიურად მტკიცდება B^2 და B^3 -ისთვის.

1.6.7 შეუღლებული სისტემის მათემატიკური გამოყვანა მატრიცული მეთოდით

განვიხილოთ გარდაქმნები დეკარტის x^i სისტემიდან პირდაპირ z^k და შეუღლებულ z_k სისტემებში:

$$x^i - X^i = \beta_k^i z^k \quad (\text{1.114})$$

$$x^i - X^i = \tilde{\beta}^{ik} z_k \quad (\text{1.115})$$

ვიპოვოთ კავშირი β_k^i და $\tilde{\beta}^{ik}$ მატრიცებს შორის. ჩავსვათ $z_k = g_{ks}z^s$:

$$x^i - X^i = \tilde{\beta}^{ik} g_{ks} z^s = \beta_s^i z^s \implies \beta_s^i = \tilde{\beta}^{ik} g_{ks} \quad (\text{ჩ.116})$$

მეორე მხრივ, რადიუს-ვექტორის სიგრძის კვადრატისთვის გვაქვს:

$$r^2 = (x^i - X^i)(x^i - X^i) = \beta_s^i \tilde{\beta}^{sk} z^s z_k \quad (\text{ჩ.117})$$

რადგან $r^2 = z^s z_s = \delta_s^k z^s z_k$, მივიღებთ ფუნდამენტურ ტოლობას:

$$\beta_s^i \tilde{\beta}^{sk} = \delta_s^k \quad (\text{ჩ.118})$$

ამ განტოლებათა სისტემის ამოხსნა კრამერის წესით იძლევა $\tilde{\beta}^{ik}$ მატრიცის ელემენტებს, საიდანაც უშუალოდ მტკიცდება, რომ კოორდინატა ღერძები ურთიერთმართობულია: კერძოდ, z_1 ღერძი მართობულია z^2 და z^3 ღერძების.

ჩ.6.8 ორთოგონალური ბაზისების კერძო შემთხვევა

ორთოგონალურ კოორდინატა სისტემაში ბაზისი ემთხვევა თავის შეუღლებულს. ამ დროს g_{ik} სიდიდეებიდან ნულისგან განსხვავებულია მხოლოდ დიაგონალური ელემენტები: g_{11}, g_{22}, g_{33} .

$$A_1 = g_{11}A^1, \quad A_2 = g_{22}A^2, \quad A_3 = g_{33}A^3 \quad (\text{ჩ.119})$$

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}}, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}}, \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}} \quad (\text{ჩ.120})$$

სიდიდეებს $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ ეწოდებათ **ლამეს კოეფიციენტები**. რკალის ელემენტი იღებს მარტივ სახეს:

$$\Delta s^2 = g_{11}(\Delta x^1)^2 + g_{22}(\Delta x^2)^2 + g_{33}(\Delta x^3)^2 = h_1^2(\Delta x^1)^2 + h_2^2(\Delta x^2)^2 + h_3^2(\Delta x^3)^2 \quad (\text{ჩ.121})$$

დასკვნა: ორთოგონალურ სისტემაში ფიზიკური კომპონენტები A^{*i} და A_i^* ემთხვევა ერთმანეთს, ხოლო მართკუთხა დეკარტის სისტემაში ერთმანეთს ემთხვევა ყველა სახის კომპონენტი: $A^i = A_i = A^{*i}$.

დამტკიცება: $\frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}} = v^1 \sqrt{g_{11}}$

ორთოგონალურ საკოორდინატო სისტემაში ვექტორის ფიზიკური კოვარიანტული კომპონენტი (ორთოგონალური გეგმილი) და ფიზიკური კონტრავარიანტული კომპონენტი (მდგენელის სიგრძე) იდენტურია.

1. **კავშირი ტენზორულ კომპონენტებს შორის:** ტენზორული აღრიცხვის თანახმად, კოვარიანტული კომპონენტი v_1 იწერება მეტრიკული ტენზორისა და კონტრავარიანტული კომპონენტების საშუალებით:

$$v_1 = g_{11}v^1 + g_{12}v^2 + g_{13}v^3 + \dots = \sum_j g_{1j}v^j$$

2. **ორთოგონალურობის პირობა:** რადგან საკოორდინატო სისტემა ორთოგონალურია, მეტრიკული ტენზორის არადიაგონალური წევრები ნულის ტოლია ($g_{ij} = 0$, როცა $i \neq j$). შესაბამისად:

$$v_1 = g_{11}v^1$$

3. **ალგებრული გარდაქმნა:** ჩავსვათ $v_1 = g_{11}v^1$ ფიზიკურ კოვარიანტულ კომპონენტში:

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}} &= \frac{g_{11}v^1}{\sqrt{g_{11}}} \\ &= \frac{(\sqrt{g_{11}})^2 \cdot v^1}{\sqrt{g_{11}}} \\ &= v^1 \sqrt{g_{11}} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \quad \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{\mathbf{g}_{11}}} = \mathbf{v}^1 \sqrt{\mathbf{g}_{11}}$$

ელექტროდინამიკური ერთეულების სისტემები: SI, გაუსი (CGS) და ჰევისაიდ-ლორენცი

4.1	მაქსველის განტოლებები სხვადასხვა სისტემაში	102
4.2	ფორმულების გადაყვანის წესები (სიმბოლური ჩანაცვლება)	103
4.2.1	SI ფორმულის გადაყვანა გაუსის (CGS) სისტემაში	103
4.3	სიდიდეებისა და ერთეულების შედარებითი ცხრილი	104
4.4	ძირითადი რიცხვითი გადაყვანის წესები	105
4.5	გაუსიდან (CGS) SI სისტემაში გადაყვანის წესი	107
4.6	პირდაპირი გადაყვანა გაუსიდან (CGS) ჰევისაიდ-ლორენცის (HL) სისტე- მაში	107
4.6.1	ძირითადი წესი (CGS $\rightarrow$ HL)	107
4.6.2	პირდაპირი გადაყვანის ცხრილი	108
4.6.3	მაგალითები	108
4.7	ზოგადი განტოლებები კოეფიციენტებით	108
4.7.1	უნივერსალური განტოლებები	109
4.7.2	კოეფიციენტების ცხრილი	109
4.8	პუასონის განტოლება და გრინის ფუნქცია სხვადასხვა სისტემაში	109
4.8.1	პუასონის განტოლება ელექტროსტატიკაში	109
4.8.2	გრინის განტოლება და გრინის ფუნქცია	110
4.8.3	პოტენციალის გამოსახვა გრინის ფუნქციით	110

ელექტროდინამიკაში გამოიყენება ერთეულთა რამდენიმე ძირითადი სისტემა: **SI** (ერთეულთა საერთაშორისო სისტემა), **გაუსის (CGS)** სისტემა და **ჰევისაიდ-ლორენცის (HL)**

რაციონალიზებული სისტემა. სისტემებს შორის მთავარი განსხვავება მდგომარეობს იმაში, თუ როგორ არის ჩაწერილი მაქსველის განტოლებები და კულონის კანონი, ასევე შეიცავენ თუ არა 4π , ϵ_0 , μ_0 და სინათლის სიჩქარის c კოეფიციენტებს.

4.1 მაქსველის განტოლებები სხვადასხვა სისტემაში

SI სისტემა

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.4)$$

სადაც $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ და $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$.

გაუსის (CGS) სისტემა

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (4.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.8)$$

სადაც $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ და $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$. გაუსის სისტემაში ელექტრულ და მაგნიტურ ველებს ($\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$) ერთი და იგივე განზომილება აქვთ.

ჰევისაიდ-ლორენცის (HL) სისტემა

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.12)$$

სადაც $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{P}$ და $\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{M}$. ეს არის რაციონალიზებული სისტემა (გაქრობილია 4π კოეფიციენტები მაქსველის განტოლებებიდან, რაც განსაკუთრებით მოსახერხებელია ველის კვანტურ თეორიაში).

ESU (CGSE) სისტემა

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (\text{ჟ.13})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{ჟ.14})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{ჟ.15})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c^2} \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{ჟ.16})$$

სადაც $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ და $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$. ESU სისტემაში ელექტროსტატიკური მუდმივა $k_1 = 1$ და ინდუქციის კოეფიციენტი $k_3 = 1$, რის გამოც სინათლის სიჩქარის კვადრატი (c^2) ფიგურირებს მხოლოდ წანაცვლებისა და დენის წევრებში.

ჟ.2 ფორმულების გადაყვანის წესები (სიმბოლური ჩანაცვლება)

თუ მოცემულია ფორმულა **SI** სისტემაში, მისი გადაყვანა გაუსის ან ჰევისაიდ-ლორენცის სისტემაში შესაძლებელია ქვემოთ მოყვანილი სიმბოლოების შესაბამისი ჩანაცვლებით.

ჟ.2.1 SI ფორმულის გადაყვანა გაუსის (CGS) სისტემაში

- $\epsilon_0 \longrightarrow \frac{1}{4\pi}$
- $\mu_0 \longrightarrow \frac{4\pi}{c^2}$
- $\mathbf{D} \longrightarrow \frac{\mathbf{D}}{4\pi}$
- $\mathbf{H} \longrightarrow \frac{c}{4\pi} \mathbf{H}$
- $\mathbf{P} \longrightarrow \mathbf{P}$
- $\mathbf{M} \longrightarrow c\mathbf{M}$
- $\mathbf{E}, \mathbf{B}, q, \rho, \mathbf{J}, \Phi, \mathbf{A}$ რჩება უცვლელი ფორმულური სტრუქტურის დონეზე.

SI ფორმულის გადაყვანა ჰევისაიდ-ლორენცის (HL) სისტემაში

- $\epsilon_0 \longrightarrow 1$
- $\mu_0 \longrightarrow \frac{1}{c^2}$
- $\mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}$

- $H \rightarrow cH$
- $P \rightarrow P$
- $M \rightarrow cM$

4.3 სიდიდეებისა და ერთეულების შედარებითი ცხრილი

ქვემოთ მოცემულ ცხრილში წარმოდგენილია ფიზიკური სიდიდეების კავშირი SI, გაუსის და ჰევისაიდ-ლორენცის სისტემებს შორის ($c \approx 3 \times 10^{10}$ cm/s არის სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში).

ESU (CGSE) სისტემა და მისი კავშირი SI სტანდარტთან

ESU (*Electrostatic System of Units* ანუ CGSE) წარმოადგენს CGS სისტემის ელექტროსტატიკურ ვარიანტს, სადაც ელექტროსტატიკური მუდმივა მიღებულია ერთეულის ტოლად ($k_1 = 1$), ხოლო დიელექტრიკული შეღწევადობა ვაკუუმში უგანზომილებო 1-ია ($\epsilon_0 = 1$).

- **კავშირი გაუსის (CGS) სისტემასთან:** გაუსის სისტემა წარმოადგენს ჰიბრიდულ სისტემას — მასში ყველა ელექტრული სიდიდე (q, I, Φ, E, D, C, R) განსაზღვრულია ზუსტად ESU სისტემის წესებით. ამიტომ ელექტრული სიდიდეებისთვის გაუსის და ESU-ს ფორმულები იდენტურია. ხოლო წმინდა მაგნიტური სიდიდეები (B, H, A, Φ_B) ESU-ში გაუსის სისტემისგან განსხვავდება c (სინათლის სიჩქარე) მამრავლით.
- **ძირითადი ერთეულები ESU-ში:**
 - მუხტი: სტატკულონი (statC ან esu)
 - პოტენციალი: სტატვოლტი (statV)
 - ტევადობა: სანტიმეტრი (cm)

ცხრილი 4.1: სისტემებს შორის სიდიდეთა და ერთეულთა თანაფარდობები

სიდიდე	SI ერთეული	გაუსი (CGS)	ESU (CGSE)	ჰევისაიდ-ლორენცი	გადაყვანა SI $\rightarrow$ ESU/CGS
მუხტი (q)	კულონი (C)	$q_G = \frac{q_{SI}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$q_{ESU} = \frac{q_{SI}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$q_{HL} = \frac{q_{SI}}{\sqrt{\epsilon_0}}$	$1 \text{ C} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ statC}$

სიდიდე	SI ერთეული	გაუსი (CGS)	ESU (CGSE)	ჰეისაიდ-ლორენცი	გადაყვანა SI → ESU/CGS
დენი (I)	ამპერი (A)	$I_G = \frac{I_{SI}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$I_{ESU} = \frac{I_{SI}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$I_{HL} = \frac{I_{SI}}{\sqrt{\epsilon_0}}$	$1 \text{ A} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ statA}$
პოტენციალი (Φ)	ვოლტი (V)	$\Phi_G = \frac{\Phi_{SI}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$\Phi_{ESU} = \frac{\Phi_{SI}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$\Phi_{HL} = \frac{\Phi_{SI}}{\sqrt{\epsilon_0}}$	$1 \text{ V} \approx \frac{1}{300} \text{ statV}$
ელ. ველი (E)	V/m	$E_G = \frac{E_{SI}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$E_{ESU} = \frac{E_{SI}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$E_{HL} = \frac{E_{SI}}{\sqrt{\epsilon_0}}$	$1 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \approx \frac{1}{300} \frac{\text{statV}}{\text{cm}}$
წანაცვლება (D)	C/m ²	$D_G = \frac{D_{SI}}{\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}}$	$D_{ESU} = \frac{D_{SI}}{\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}}}$	$D_{HL} = \frac{D_{SI}}{\sqrt{\epsilon_0}}$	$1 \frac{\text{C}}{\text{m}^2} \approx 12\pi \cdot 10^5 \text{ statC/cm}^2$
მაგნ. ინდუქცია (B)	ტესლა (T)	$B_G = \frac{B_{SI}}{\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}}$	$B_{ESU} = \frac{B_{SI}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$B_{HL} = \frac{B_{SI}}{\sqrt{\mu_0}}$	$1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$
მაგნ. დაძაბულობა (H)	A/m	$H_G = \frac{H_{SI}}{\sqrt{4\pi\mu_0}}$	$H_{ESU} = \frac{H_{SI}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$H_{HL} = \frac{H_{SI}}{\sqrt{\mu_0}}$	$1 \text{ A/m} = 4\pi \cdot 10^{-3} \text{ Oe}$
მაგნ. ნაკადი (Φ_B)	ვებერი (Wb)	$\Phi_{B,G} = \frac{\Phi_{B,SI}}{\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}}}$	$\Phi_{B,ESU} = \frac{\Phi_{B,SI}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$	$\Phi_{B,HL} = \frac{\Phi_{B,SI}}{\sqrt{\mu_0}}$	$1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ Mx}$
ინდუქციურობა (L)	ჰენრი (H)	$L_G = \frac{L_{SI}}{4\pi\epsilon_0}$	$L_{ESU} = \frac{L_{SI}}{4\pi\epsilon_0}$	$L_{HL} = \frac{L_{SI}}{\epsilon_0}$	$1 \text{ H} \approx \frac{\text{s}^2/\text{cm}}{9 \cdot 10^{11}}$
ტევადობა (C)	ფარადი (F)	$C_G = \frac{C_{SI}}{4\pi\epsilon_0}$	$C_{ESU} = \frac{C_{SI}}{4\pi\epsilon_0}$	$C_{HL} = \frac{C_{SI}}{\epsilon_0}$	$1 \text{ F} \approx 9 \cdot 10^{11} \text{ cm}$
წინაღობა (R)	ომი (Ω)	$R_G = \frac{R_{SI}}{4\pi\epsilon_0}$	$R_{ESU} = \frac{R_{SI}}{4\pi\epsilon_0}$	$R_{HL} = \frac{R_{SI}}{\epsilon_0}$	$1 \Omega \approx \frac{\text{s/cm}}{9 \cdot 10^{11}}$

ყ.4 ძირითადი რიცხვითი გადაყვანის წესები

პრაქტიკულ გამოთვლებში სიდიდეთა გადასაყვანად გამოიყენება შემდეგი ზუსტი და მიახლოებითი რიცხვითი თანაფარდობები:

1. მუხტი:

$$1 \text{ C} = 2.99792 \times 10^9 \text{ statC} \approx 3 \times 10^9 \text{ statC} \quad (\text{ყ.17})$$

2. პოტენციალი / ძაბვა:

$$1 \text{ statV} \approx 299.792 \text{ V} \approx 300 \text{ V} \implies 1 \text{ V} = \frac{1}{300} \text{ statV} \quad (\text{ყ.18})$$

3. მაგნიტური ინდუქცია:

$$1 \text{ T (ტესლა)} = 10^4 \text{ G (გაუსი)} \quad (\text{4.19})$$

4. მაგნიტური დაძაბულობა:

$$1 \text{ Oe (ერსტედი)} = \frac{1000}{4\pi} \text{ A/m} \approx 79.577 \text{ A/m} \quad (\text{4.20})$$

5. მაგნიტური ნაკადი:

$$1 \text{ Wb (ვებერი)} = 10^8 \text{ Mx (მაქსველი)} \quad (\text{4.21})$$

6. ელექტრული ტევადობა: გაუსის სისტემაში ტევადობის ერთეულია სანტიმეტრი (cm):

$$1 \text{ F (ფარადი)} \approx 9 \times 10^{11} \text{ cm} \quad (\text{4.22})$$

SI ფორმულის გადაყვანა ESU (CGSE) სისტემაში

თუ ფორმულა მოცემულია SI სისტემაში, მისი გადაყვანა ESU (CGSE) სისტემაში ხორციელდება შემდეგი სიმბოლური ჩანაცვლებებით:

• მუდმივების ჩანაცვლება:

$$\epsilon_0 \rightarrow \frac{1}{4\pi}, \quad \mu_0 \rightarrow \frac{4\pi}{c^2} \quad (\text{4.23})$$

• სიდიდეების ჩანაცვლება:

$$q_{\text{SI}} \rightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} q_{\text{ESU}} \quad (\text{4.24})$$

$$\mathbf{E}_{\text{SI}} \rightarrow \frac{\mathbf{E}_{\text{ESU}}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \quad (\text{4.25})$$

$$\Phi_{\text{SI}} \rightarrow \frac{\Phi_{\text{ESU}}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \quad (\text{4.26})$$

$$\mathbf{D}_{\text{SI}} \rightarrow \sqrt{\frac{\epsilon_0}{4\pi}} \mathbf{D}_{\text{ESU}} \quad (\text{4.27})$$

$$\mathbf{B}_{\text{SI}} \rightarrow \frac{\mathbf{B}_{\text{ESU}}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \quad (\text{4.28})$$

$$\mathbf{H}_{\text{SI}} \rightarrow \sqrt{4\pi\epsilon_0} \mathbf{H}_{\text{ESU}} \quad (\text{4.29})$$

ძირითადი რიცხვითი გადაყვანის წესები ESU (CGSE) სისტემისთვის

1. მუხტი (q):

$$1 \text{ C} \approx 3 \cdot 10^9 \text{ statC (esu)} \quad (\text{4.30})$$

2. პოტენციალი / ძაბვა (Φ, V):

$$1 \text{ V} \approx \frac{1}{300} \text{ statV} \quad (1 \text{ statV} \approx 300 \text{ V}) \quad (\text{4.31})$$

3. ელექტრული ველი (E):

$$1 \frac{\text{V}}{\text{cm}} \approx \frac{1}{300} \frac{\text{statV}}{\text{cm}} \quad \left(1 \frac{\text{statV}}{\text{cm}} \approx 3 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) \quad (\text{4.32})$$

4. ელექტრული ტევადობა (C):

$$1 \text{ F} \approx 9 \cdot 10^{11} \text{ cm} \quad (4.33)$$

5. მაგნიტური ინდუქცია (B):

$$1 \text{ T} \approx \frac{1}{3 \cdot 10^6} \text{ statT (ESU)} \quad (\text{შენიშვნა: } B_{\text{ESU}} = c \cdot B_{\text{G}}) \quad (4.34)$$

4.5 გაუსიდან (CGS) SI სისტემაში გადაყვანის წესი

თუ ფორმულა მოცემულია გაუსის (CGS) სისტემაში, მისი SI სისტემაში გადასაყვანად გაუსის სიდიდეების ადგილას უნდა ჩავსვათ მათი SI ექვივალენტები (ჩანაცვლების მეთოდი):

ფიზიკური სიდიდე	გაუსის სიმბოლო	ჩანაცვლება SI გამოსახულებით
მუხტი / სიმკვრივე	$q_{\text{G}}, \rho_{\text{G}}$	$\frac{q_{\text{SI}}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}, \frac{\rho_{\text{SI}}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$
ელექტრული ველი / პოტენციალი	$E_{\text{G}}, \Phi_{\text{G}}$	$\sqrt{4\pi\epsilon_0} E_{\text{SI}}, \sqrt{4\pi\epsilon_0} \Phi_{\text{SI}}$
ელექტრული წანაცვლება	D_{G}	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}} D_{\text{SI}}$
მაგნიტური ინდუქცია	B_{G}	$\sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} B_{\text{SI}}$
მაგნიტური დაძაბულობა	H_{G}	$\sqrt{4\pi\mu_0} H_{\text{SI}}$
პოლარიზაცია / მაგნიტიზაცია	$P_{\text{G}}, M_{\text{G}}$	$\sqrt{\frac{4\pi}{\epsilon_0}} P_{\text{SI}}, \sqrt{\frac{4\pi}{\mu_0}} M_{\text{SI}}$

ცხრილი 4.2: გაუსის ფორმულების SI-ში გადაყვანის ჩანაცვლების წესი

მაგალითი (კულონის კანონი):

გაუსის სისტემაში: $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$.

ჩავსვათ მუხტების SI ექვივალენტები:

$$F = \frac{\left(\frac{q_{1,\text{SI}}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}\right) \left(\frac{q_{2,\text{SI}}}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}\right)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{1,\text{SI}} q_{2,\text{SI}}}{r^2}$$

4.6 პირდაპირი გადაყვანა გაუსიდან (CGS) ჰევისაიდ-ლორენცის (HL) სისტემაში

გაუსის (CGS) და ჰევისაიდ-ლორენცის (HL) სისტემებს შორის პირდაპირი გადაყვანა ძალიან მარტივია, რადგან მათში მექანიკური ერთეულები (cm, g, s) იდენტურია. განსხვავება მხოლოდ $\sqrt{4\pi}$ კოეფიციენტშია.

4.6.1 ძირითადი წესი (CGS $\rightarrow$ HL)

1. ყველა ველის სიდიდე და პოტენციალი (E, B, D, H, Φ , A) იყოფა $\sqrt{4\pi}$ -ზე.

2. ყველა წყარო და გარემოს პოლარიზაცია (q, ρ, I, J, P, M) მრავლდება $\sqrt{4\pi}$ -ზე.
3. გარემოს მახასიათებლები (ϵ, μ) უცვლელი რჩება.

4.6.2 პირდაპირი გადაყვანის ცხრილი

სიდიდის ტიპი	გაუსი (CGS)	HL (ჰენსაიდი)	გადაყვანის ფორმულა
ველები / პოტენციალი	$E_G, B_G, D_G, H_G, \Phi_G, A_G$	$E_{HL}, B_{HL}, D_{HL}, H_{HL}, \Phi_{HL}, A_{HL}$	$X_{HL} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} X_G$
მუხტი და დენი	q_G, ρ_G, I_G, J_G	$q_{HL}, \rho_{HL}, I_{HL}, J_{HL}$	$Y_{HL} = \sqrt{4\pi} Y_G$
პოლარიზაცია / მაგნიტიზაცია	P_G, M_G	P_{HL}, M_{HL}	$P_{HL} = \sqrt{4\pi} P_G$ $M_{HL} = \sqrt{4\pi} M_G$
შედწევადობა	ϵ, μ	ϵ, μ	$\epsilon_{HL} = \epsilon_G, \mu_{HL} = \mu_G$
ტევადობა	C_G	C_{HL}	$C_{HL} = 4\pi C_G$
ინდუქციურობა	L_G	L_{HL}	$L_{HL} = \frac{1}{4\pi} L_G$
წინაღობა	R_G	R_{HL}	$R_{HL} = \frac{1}{4\pi} R_G$

4.6.3 მაგალითები

- კულონის კანონი (CGS $\rightarrow$ HL):

გაუსის სისტემაში: $F = \frac{q_{1,G} q_{2,G}}{r^2}$.

ჩავსვათ $q_G = \frac{q_{HL}}{\sqrt{4\pi}}$:

$$F = \frac{\left(\frac{q_{1,HL}}{\sqrt{4\pi}}\right) \left(\frac{q_{2,HL}}{\sqrt{4\pi}}\right)}{r^2} = \frac{q_{1,HL} q_{2,HL}}{4\pi r^2}$$

- მატერიალური თანაფარდობა (CGS $\rightarrow$ HL):

გაუსის სისტემაში: $D_G = E_G + 4\pi P_G$.

ჩავსვათ $D_G = \sqrt{4\pi} D_{HL}$, $E_G = \sqrt{4\pi} E_{HL}$ და $P_G = \frac{P_{HL}}{\sqrt{4\pi}}$:

$$\sqrt{4\pi} D_{HL} = \sqrt{4\pi} E_{HL} + 4\pi \left(\frac{P_{HL}}{\sqrt{4\pi}} \right) \Rightarrow D_{HL} = E_{HL} + P_{HL}$$

4.7 ზოგადი განტოლებები კოეფიციენტებით

გაცილებით მოსახერხებელია მაქსველისა და კულონის განტოლებების ჩაწერა ზოგადი k_1, k_2, k_3 კოეფიციენტებით.

ჟ.7.1 უნივერსალური განტოლებები

1. კულონის კანონი:

$$F = k_1 \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{ჟ.35})$$

2. ლორენცის ძალა:

$$\vec{F} = q (\mathbf{E} + k_3 \vec{v} \times \mathbf{B}) \quad (\text{ჟ.36})$$

3. მაქსველის განტოლებები ვაკუუმში:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_1 \rho \quad (\text{ჟ.37})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{ჟ.38})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -k_3 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{ჟ.39})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi k_2}{k_3} \mathbf{J} + \frac{k_2}{k_1 k_3} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{ჟ.40})$$

ჟ.7.2 კოეფიციენტების ცხრილი

ESU (CGSE) სისტემაში ელექტროსტატიკური მუდმივა $k_1 = 1$ -ია, ხოლო ინდუქციის კანონში $k_3 = 1$ (გაუსის სისტემისგან განსხვავებით, სადაც $k_3 = 1/c$). ამიტომ, დენისა და წანაცვლების წევრებში c^2 მამრავლი გადადის k_2 -ში, ანუ $k_2 = 1/c^2$.

სისტემა	k_1	k_2	k_3	კავშირი c -სთან
SI	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	1	$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$
გაუსი (CGS)	1	$\frac{1}{c^2}$	$\frac{1}{c}$	$c = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$
ESU (CGSE)	1	$\frac{1}{c^2}$	1	$c = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$
ჰევისაიდ-ლორენცი	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c^2}$	$\frac{1}{c}$	$c = \sqrt{\frac{k_1}{k_2}}$

ცხრილი ჟ.4: კოეფიციენტების მნიშვნელობები სხვადასხვა ერთეულთა სისტემაში

ჟ.8 პუასონის განტოლება და გრინის ფუნქცია სხვადასხვა სისტემაში

ჟ.8.1 პუასონის განტოლება ელექტროსტატიკაში

პოტენციალისთვის ($\mathbf{E} = -\nabla\Phi$) პუასონის განტოლებას აქვს სახე:

- ზოგადი სახე:

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi k_1 \rho \quad (4.41)$$

- SI სისტემაში ($k_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$):

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.42)$$

- გაუსის სისტემაში ($k_1 = 1$):

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho \quad (4.43)$$

- ESU (CGSE) სისტემაში ($k_1 = 1$):

$$\nabla^2 \Phi = -4\pi \rho \quad (4.44)$$

- ჰევისაიდ-ლორენცის სისტემაში ($k_1 = \frac{1}{4\pi}$):

$$\nabla^2 \Phi = -\rho \quad (4.45)$$

4.8.2 გრინის განტოლება და გრინის ფუნქცია

გრინის ფუნქცია განისაზღვრება სუფთა გეომეტრიული დიფერენციალური განტოლებით (რომელიც ერთეულთა სისტემაზე დამოუკიდებელია):

$$\nabla^2 G(\vec{x}, \vec{x}') = -4\pi \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (4.46)$$

უსასრულო სივრცისთვის ამ განტოლების ამონახსნი (თავისუფალი სივრცის გრინის ფუნქცია) ყოველთვის არის:

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (4.47)$$

4.8.3 პოტენციალის გამოსახვა გრინის ფუნქციით

სისტემებს შორის განსხვავება ჩნდება მაშინ, როდესაც გრინის ფუნქციის საშუალებით ვწერთ ელექტრულ პოტენციალს $\Phi(\vec{x})$:

- ზოგადი ფორმულა:

$$\Phi(\vec{x}) = k_1 \int_V \rho(\vec{x}') G(\vec{x}, \vec{x}') d^3x' + \text{სასაზღვრო წევრები} \quad (4.48)$$

- SI სისტემაში:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (4.49)$$

- გაუსის (CGS) სისტემაში:

$$\Phi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (4.50)$$

შენიშვნა: ზოგჯერ SI სისტემაში ფიზიკურ გრინის ფუნქციად განმარტავენ $G_{\text{phys}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{x} - \vec{x}'|}$, რის შედეგადაც განტოლება იღებს სახეს $\nabla^2 G_{\text{phys}} = -\frac{1}{\epsilon_0}\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$, თუმცა თეორიულ ფიზიკაში (მაგალითად, ჯექსონთან) უპირატესობა ენიჭება უგანზომილო/გეომეტრიულ $G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$ განმარტებას.