

ლექცია 5: ენერგიისა და სიმძლავრის სიგნალების მაგალითები



შესავალი

- 1 ენერგიისა და სიმძლავრის სიგნალები
- 2 მაგალითი 1
- 3 მაგალითი 2
- 4 მაგალითი 3
- 5 ლუწი და კენტი სიგნალის მაგალითი
- 6 ლუწი და კენტი CT სიგნალების კომბინაცია



ენერგიისა და სიმძლავრის სიგნალები

ნამდვილმნიშვნელობიანი CT სიგნალის $x(t)$ მყისიერი სიმძლავრე CT-სთვის $t = t_o$ მომენტში მოიცემა $x^2(t_o)$ ფორმულით.

ნამდვილმნიშვნელობიანი DT სიგნალის $x[k]$ მყისიერი სიმძლავრე $k = k_o$ დროის მომენტში მოიცემა $x^2[k_o]$ ფორმულით.

თუ სიგნალი კომპლექსურმნიშვნელობიანია, მყისიერი სიმძლავრის გამოსახულებები იღებს სახეს: $|x(t_o)|^2$ და $|x[k_o]|^2$, სადაც სიმბოლო $|\cdot|$ აღნიშნავს კომპლექსური რიცხვის აბსოლუტურ მნიშვნელობას.

სრული ენერგიისთვის გვაქვს:

$$\text{CT სიგნალები} \quad E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (1)$$

$$\text{DT სიგნალები} \quad E_x = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[k]|^2 \quad (2)$$



ენერგიისა და სიმძლავრის სიგნალები

სიმძლავრე არის ენერგია დროის ერთეულში. საშუალო სიმძლავრე CT და DT სიგნალებისთვის მოიცემა შემდეგნაირად:

$$\text{CT სიგნალები} \quad P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt \quad (3)$$

$$\text{DT სიგნალები} \quad P_x = \frac{1}{2K+1} \sum_{k=-K}^{+K} |x[k]|^2 \quad (4)$$



ენერგიისა და სიმძლავრის სიგნალები

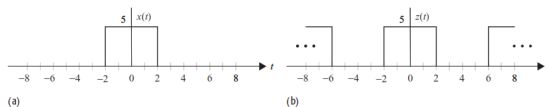
პერიოდული სიგნალებისთვის გვაქვს:

$$\text{CT სიგნალები} \quad P_x = \frac{1}{T_o} \int_{(T_o)} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_o} \int_{t_1}^{t_1+T_o} |x(t)|^2 dt \quad (5)$$

$$\text{DT სიგნალები} \quad P_x = \frac{1}{K_o} \sum_{k=(K_o)} |x[k]|^2 = \frac{1}{K_o} \sum_{k=k_1}^{k_1+K_o-1} |x[k]|^2 \quad (6)$$



მაგალითი 1



სურ 1: ენერგიისა და სიმძლავრის სიგნალები

განვიხილოთ Fig.1 (a) და (b)-ზე ნაჩვენები CT სიგნალები. გამოთვალეთ ამ ორ სიგნალში არსებული მყისიერი სიმძლავრე, საშუალო სიმძლავრე და ენერგია. მოახდინეთ ამ სიგნალების კლასიფიკაცია სიმძლავრის ან ენერგიის სიგნალებად.

ამოხსნა:

a) $x(t)$ სიგნალი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$x(t) = \begin{cases} 5 & -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{სხვაგან} \end{cases} \quad (7)$$



მაგალითი 1

$$\text{მყისიერი სიმძლავრე } P_x(t) = \begin{cases} 25 & -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{სხვაგან} \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{ენერგია } E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-2}^{+2} 25 dt = 100 \quad (9)$$

$$\text{საშუალო სიმძლავრე } P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E_x = 0; \quad (10)$$

ეს სიგნალი არის ენერგიის სიგნალი



მაგალითი 1

b) $z(t)$ სიგნალი არის პერიოდული სიგნალი ძირითადი პერიოდით 8 და ერთ პერიოდზე გამოისახება შემდეგნაირად:

$$z(t) = \begin{cases} 5 & -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & 2 \leq |t| \leq 4 \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{მყისიერი სიმძლავრე } P_z(t) = \begin{cases} 25 & -2 \leq t \leq 2 \\ 0 & 2 \leq |t| \leq 4 \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{საშუალო სიმძლავრე } P_z = \frac{1}{8} \int_{-4}^{+4} |z(t)|^2 dt = \frac{1}{8} \int_{-2}^{+2} 25 dt = \frac{100}{8} = 12.5 \quad (13)$$

$$\text{ენერგია } E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |z(t)|^2 dt = \infty \quad (14)$$

ეს სიგნალი არის სიმძლავრის სიგნალი



მაგალითი 2

განვიხილოთ შემდეგი DT მიმდევრობა:

$$f[k] = \begin{cases} e^{-0.5k} & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \quad (15)$$

დაადგინეთ, სიგნალი სიმძლავრისაა თუ ენერგიის.

ამოხსნა: DT მიმდევრობის სრული ენერგია გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$E_f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f[k]|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |e^{-0.5k}|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-1})^k = \frac{1}{1 - e^{-1}} \approx 1.582 \quad (16)$$

$f[k]$ არის ენერგიის სიგნალი;



მაგალითი 3

დაადგინეთ, არის თუ არა DT მიმდევრობა $g[k] = 3 \cos(\pi k/10)$ სიმძლავრის ან ენერგიის სიგნალი. **ამოხსნა:** $g[k]$ არის პერიოდული სიგნალი 20-ის ტოლი ძირითადი პერიოდით. ყველა პერიოდული სიგნალი არის სიმძლავრის სიგნალი. ამდენად, DT მიმდევრობა $g[k]$ წარმოადგენს სიმძლავრის სიგნალს. 6 ფორმულის გამოყენებით $g[k]$ -ს საშუალო სიმძლავრე მოიცემა შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
 P_g &= \frac{1}{20} \sum_{k=0}^{19} 9 \cos^2\left(\frac{\pi k}{10}\right) = \frac{9}{20} \sum_{k=0}^{19} \frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi k}{10}\right) \right] \\
 &= \underbrace{\frac{9}{40} \sum_{k=0}^{19} 1}_{\text{წევრი 1}} + \underbrace{\frac{9}{40} \sum_{k=0}^{19} \cos\left(\frac{2\pi k}{10}\right)}_{\text{წევრი 2}}
 \end{aligned}$$

"წევრი 1"-უდრის $9 \cdot 20/40 = 4.5$, "წევრი 2"-უდრის ნულს (იხ. სახელმძღვანელოს გვ. 20 ტექსტში, გვ. 34 pdf-ში). ასეთი ხანგრძლივი გამოთვლების თავიდან აცილება შეგვიძლია, თუ



ლუწი და კენტი სიგნალის მაგალითი

წარმოადგინეთ CT სიგნალი

$$x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{სხვაგან} \end{cases} \quad (17)$$

ლუწი და კენტი სიგნალების კომბინაციის სახით.

ამოხსნა:

გავიხსენოთ ფორმულები:

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad (18)$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2} (x(t) + x(-t)) \quad (19)$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} (x(t) - x(-t)) \quad (20)$$



ლუწი და კენტი სიგნალის მგალობითი

$$x(-t) = \begin{cases} -t & 0 \leq -t < 1 \\ 0 & \text{სხვაგან} \end{cases} = \begin{cases} -t & -1 < t \leq 0 \\ 0 & \text{სხვაგან} \end{cases} \quad (21)$$

$$x_e(t) = \frac{1}{2} (x(t) + x(-t)) = \begin{cases} 1/2 \cdot t & 0 \leq t < 1 \\ -1/2 \cdot t & -1 \leq t < 0 \\ 0 & \text{სხვაგან} \end{cases} \quad (22)$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2} (x(t) - x(-t)) = \begin{cases} 1/2 \cdot t & 0 \leq t < 1 \\ 1/2 \cdot t & -1 \leq t < 0 \\ 0 & \text{სხვაგან} \end{cases} \quad (23)$$



ლუწი და კენტი სიგნალის მაგალითი

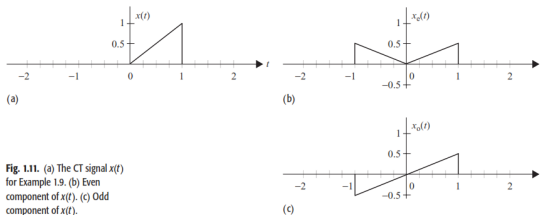


Fig. 1.11. (a) The CT signal $x(t)$ for Example 1.9. (b) Even component of $x(t)$. (c) Odd component of $x(t)$.

სურ 2: $x(t)$, $x_o(t)$ და $x_e(t)$



ლუწი და კენტი CT სიგნალების კომბინაცია

განვიხილოთ $g_e(t)$ და $h_e(t)$ როგორც ორი CT ლუწი სიგნალი, ხოლო $g_o(t)$ და $h_o(t)$ როგორც ორი CT კენტი სიგნალი. შემდეგი თვისებები შეიძლება გამოყენებულ იქნას ამ ოთხი სიგნალის სხვადასხვა კომბინაციის ლუწ და კენტ კატეგორიებად კლასიფიკაციისთვის.

(i) CT ლუწი სიგნალისა და CT კენტი სიგნალის ნამრავლი იძლევა CT კენტ სიგნალს. ამიტომ CT სიგნალი

$x(t) = g_e(t) \times h_o(t)$ არის კენტი სიგნალი.

(ii) CT კენტი სიგნალის ნამრავლი სხვა CT კენტ სიგნალზე იძლევა CT ლუწ სიგნალს. ამიტომ CT სიგნალი

$h(t) = g_o(t) \times h_o(t)$ არის ლუწი სიგნალი.

(iii) ორი CT ლუწი სიგნალის ნამრავლი იძლევა სხვა CT ლუწ სიგნალს. ამიტომ CT სიგნალი $z(t) = g_e(t) \times h_e(t)$ არის ლუწი სიგნალი.

(iv) ანტისიმეტრიის თვისების გამო, CT კენტი სიგნალი $t = 0$



ლუწი და კენტი CT სიგნალების კომბინაცია

(v) CT კენტი სიგნალის ინტეგრირება $[-T, T]$ საზღვრებში იძლევა ნულოვან მნიშვნელობას.

(vi) CT ლუწი სიგნალის ინტეგრალი $[-T, T]$ საზღვრებში შეიძლება გამარტივდეს შემდეგნაირად:

$$\int_{-T}^T g_e(t) dt = 2 \int_0^T g_e(t) dt$$

ეს თვისებები შეიძლება გავრცელდეს DT სიგნალებზეც, (vi)-ის გარდა.

$$(vi) \sum_{k=-M}^M g_e[k] = g_e[0] + 2 \sum_{k=1}^M g_e[k]$$