

ჰევისაიდის და დელტა ფუნქციები. სიგნალის გარდაქმნა.

(ლექცია №1 — 3 დამატება)

ლევან შოშიაშვილი

ელექტრული და ელექტრონული ინჟინერიის დეპარტამენტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
ივ. ჯავახიშვილის თბილისის სახ. უნივერსიტეტი,

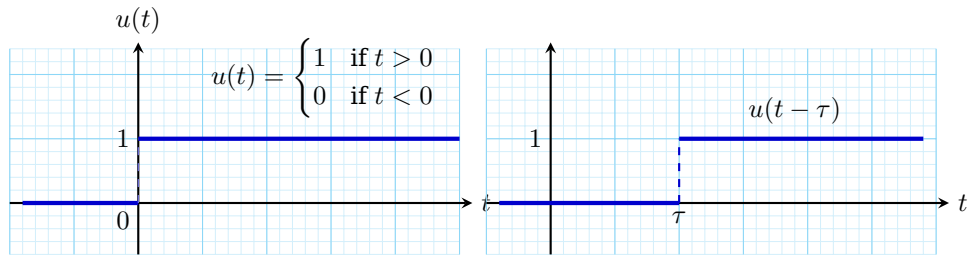
განაზღა 9 სექ. 2026

სარჩევი

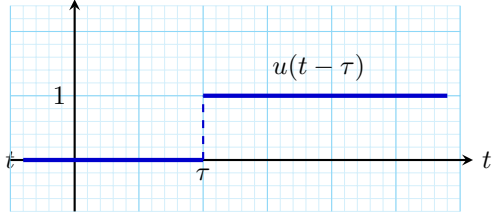
1	ჰევისაიდის ფუნქცია	1
1.1	მაგალითი: მართკუთხა იმპულსი	2
1.2	მაგალითი: პერიოდული ძაბვა	3
1.3	მაგალითი: მართკუთხა იმპულსი, როგორც $u(t)$ კომბინაცია	4
1.4	მაგალითი: სამკუთხედი იმპულსი $\Delta(\frac{t}{T})$	5
2	$\delta(t)$ და $u(t)$ ფუნქციები როგორც ჩართვის ფუნქცია	6
2.1	δ ფუნქციის თვისებები	7
3	სიგნალის გარდაქმნა: $f(2t+3)$	9
3.1	საწყისი სიგნალი $f(t)$	9
3.2	გარდაქმნა არგუმენტის ჩანაცვლებით	9
3.3	გარდაქმნილი სიგნალის გრაფიკი	10
3.4	გეომეტრიული ინტერპრეტაცია	10
4	სიგნალის წარმოდგენა ჰევისაიდის (ჩართვის) ფუნქციით	11
5	სიგნალის გარდაქმნა ჩართვის ფუნქციების საშუალებით	12
5.1	ამოცანის დასმა	12
5.2	სკალირება არეკვლით ($t \rightarrow -2t - 4$)	14

1 ჰევისაიდის ფუნქცია

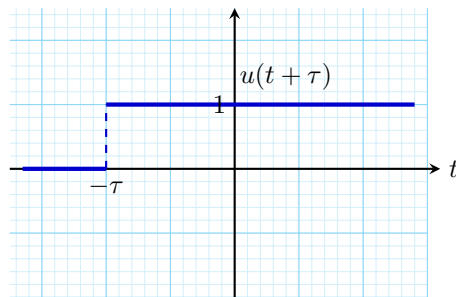
ჰევისაიდის ფუნქცია და მისი გარდაქმნები მოცემულია სურ. 1. — სრ. 6



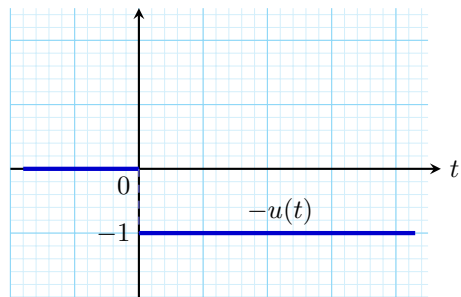
სურ 1: ჰევისაიდის ფუნქცია $u(t)$



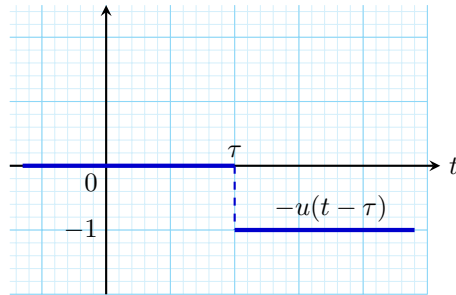
სურ 2: $u(t - \tau)$



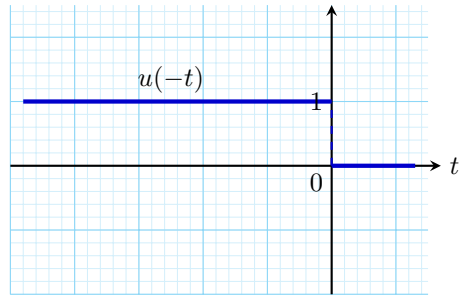
სურ 3: $u(t + \tau)$



სურ 4: $-u(t)$



სურ 5: $-u(t - \tau)$



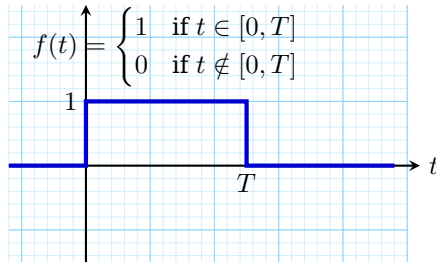
სურ 6: $u(-t)$

1.1 მაგალითი: მართკუთხა იმპულსი

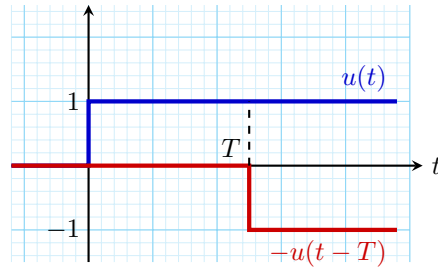
სურ.7 გამოსახული მართკუთხედი იმპულსი T ხანგრძლივობით შეგვიძლია წარმოვადგინოთ როგორც ორი ჰევისაიდის ფუნქციების ჯამი სურ.8:

$$f(t) = u(t) + (-u(t - T))$$

. ყურადღება მიაქციეთ რომ ეს არაა სახელმძღვანელოს $\Pi(t)$ არამედ $f(t) = \Pi\left(\frac{t}{T} - 0.5\right)$.

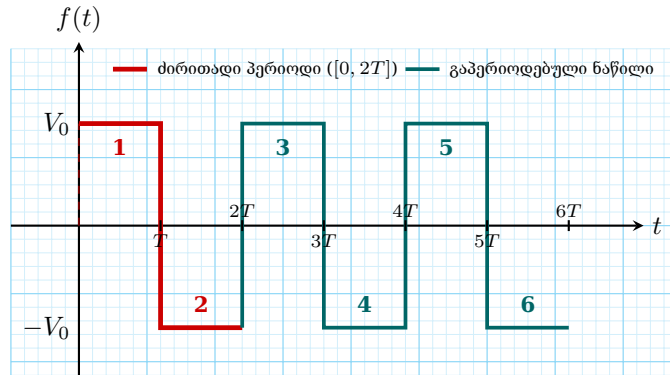


სურ 7: მართკუთხა იმპულსი



სურ 8: მართკუთხა იმპულსის გაშლა ჰევისაიდის ფუნქციებად

1.2 მაგალითი: პერიოდული ძაბვა



სურ 9: პერიოდული იმპულსი

გამოვსახოთ სურ.9 გამოსახული იმპულსი ჰევისაიდის ფუნქციების საშუალებით.

მაგალითი 1 მართკუთხა იმპულსი გამოსახული იყო ჰევისაიდის ფუნქციების საშუალებით. სურ.9-ზე გამოსახული ფუნქცია არის ზემოთ მოყვანილი მართკუთხა იმპულსების მიმდევრობა ოდონდ $T \cdot n$ მომენტებში როცა n ლუწია იცვლის ნიშანს.

$$f(t) = \begin{cases} V_0 & \text{if } t \in [T \cdot n, T \cdot (2n + 1)] \\ -V_0 & \text{if } t \notin [T \cdot n, T \cdot (2n + 1)] \end{cases} \text{ სადა } n = 0, 1, 2 \dots \quad (1)$$

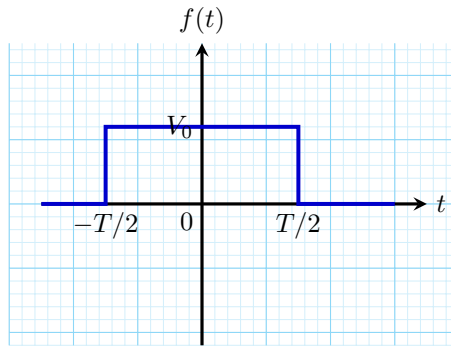
გამოვსახოთ $n = 0, 1, 2 \dots$ იმპულსები მართკუთხა იმპულსის საშუალებით:

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0 \cdot (u(t) - u(t - T)) \\ V_2 &= V_0 \cdot (-u(t - T) + u(t - 2T)) \\ V_3 &= V_0 \cdot (u(t - 2T) - u(t - 3T)) \\ V_4 &= V_0 \cdot (-u(t - 3T) + u(t - 4T)) \\ V_5 &= V_0 \cdot (u(t - 4T) - u(t - 5T)) \end{aligned}$$

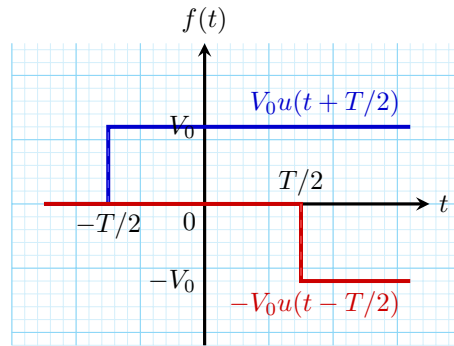
შევკრიბოთ V_i . მივიღებთ

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum V_i = V_0 \{ u(t) - u(t - T) - u(t - T) + u(t - 2T) + u(t - 2T) - u(t - 3T) - \\ &\quad - u(t - 3T) + u(t - 4T) + u(t - 4T) - u(t - 5T) + \dots \} = \\ &= V_0 \{ u(t) - 2 \cdot u(t - T) + 2 \cdot u(t - 2T) - 2 \cdot u(t - 3T) + \dots \} = \\ &= V_0 \{ u(t) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} u(t - n \cdot T) \cdot (-1)^n \} \end{aligned} \quad (2)$$

1.3 მაგალითი: მართკუთხა იმპულსი, როგორც $u(t)$ კომბინაცია



სურ 10: მართკუთხა იმპულსი ამპლიტუდა V_0 ხანგრძლივობა T



სურ 11: ფორმულა (3) მართკუთხა იმპულსის წარმოდგენა ჩართვის ფუნქციებით

$$f(t) = V_0 u(t + T/2) - V_0 u(t - T/2) \quad (3)$$

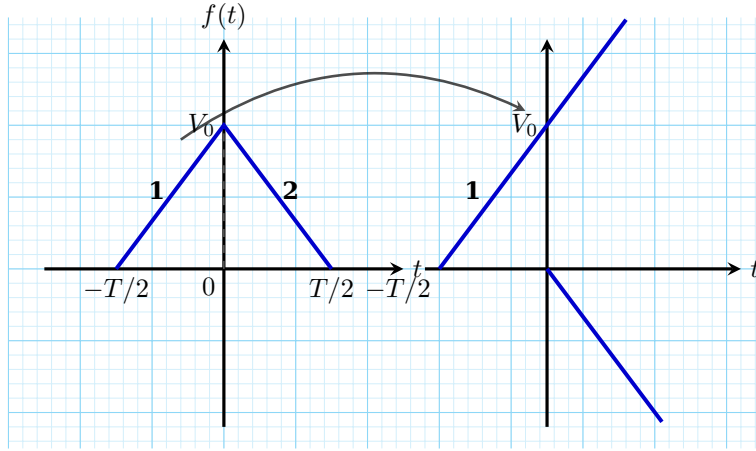
ეს სიგნალი მოცემულია სურ. 10-ზე.

დავადება 1: დაწერეთ ანალიზური ფორმულა როცა ეს იმპულსი მეორდება τ პერიოდით

1.4 მაგალითი: სამკუთხედი იმპულსი $\Delta\left(\frac{t}{T}\right)$

სურ.12-ზე გამოსახული იმპულსი შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ როგორც (1) და (2) იმპულსების ჯამი. ამასთან (1) მონაკვეთი(იმპულსი) შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:
ესაა წრფის ნაწილი კოორდინატებით $(-T/2, 0), (0, V_0)$. ამ წრფის განტოლებაა

$$y = V_0/(T/2) \cdot t + V_0$$



სურ 12: სამკუთხედი იმპულსი ამპლიტუდა V_0 ხანგრძლივობა T

ვინაიდან იმპულსი იწყება $-T/2$ მომენტში ეს განტოლება უნდა გავამრავლოთ $u(t+T/2)$, მაგრამ ეს იქნება სხივი რომელიც იწყება $(-T/2, 0)$ და გრძელდება უსასრულობამდე შემოტმოყვანილი წრფის განტოლების მიხედვით. იმისათვის რომ მივიღოთ მონაკვეთი $(-T/2, 0), (0, V_0)$ ამ სხივის განტოლებას უნდა გამოვაკლოთ მეორე სხივი რომელიც იწყება $(0, V_0)$ და მოდულით ტოლია მოცემული სხივისა. ეს გრაფიკულად ნახვენებია ნახაზზე მარჯვნივ. ამ, მეორე სხივის, განტოლება იქნება:

$$y = (-V_0/(T/2) \cdot t - V_0) \cdot u(t)$$

ამრიგად, პირველი მონაკვეთის განტოლებაა:

$$V_1 = V_0 \left(\frac{2}{T} + 1 \right) u(t + T/2) - V_0 \left(\frac{2}{T} + 1 \right) u(t)$$

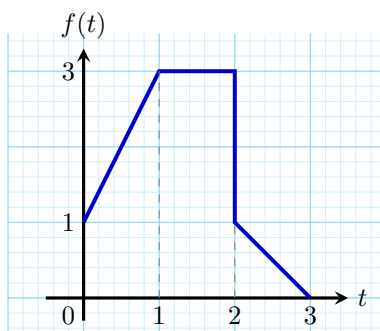
რაც შეეხება მეორე მონაკვეთს ((2)-სურ.12) ეს იგივეა რაც პირველი მონაკვეთი ოდონდ უარყოფითი დახრის კუთხის ტანგენსით.და იწყება 0 და გრძელდება $T/2$. ანუ მეორე მონაკვეთის განტოლებაა:

$$V_2 = V_0 \left(-\frac{2}{T} + 1 \right) u(t) - V_0 \left(-\frac{2}{T} + 1 \right) u(t - T/2)$$

სრული იმპულსი იქნება

$$V(t) = V_1 + V_2 \quad (4)$$

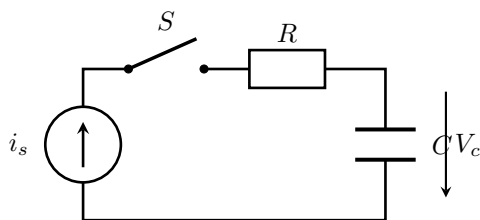
დავალება 2: დაწერეთ ანალიზური ფორმულა როცა ეს იმპულსი მეორდება $\tau > T$ პერიოდით



სურ 13: უბან-უბან წრფივი სიგნალი

დავალება 3: დაწერეთ ანალიზური ფორმულა სურ.13 მოცემული იმპულსისთვის.

2 $\delta(t)$ და $u(t)$ ფუნქციები როგორც ჩართვის ფუნქცია



სურ 14: კონდენსატორის დამუხტვის წრედი

განვიხილოთ სურ.14 კონდენსატორის დამუხტვის ამოცანა. ვთქვათ $t = 0$ მომენტში ირთვება $i_s = const$ დენი. მაშინ ძაბვა კონდენსატორზე იქნება:

$$V_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_c(\tau) d\tau \quad (5)$$

$$i_c = i_s \cdot u(t)$$

$$V_c = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_s u(\tau) d\tau = \frac{i_s}{C} \int_{-\infty}^0 u(\tau) d\tau + \frac{i_s}{C} \int_0^t u(\tau) d\tau$$

$$V_c = \frac{i_s}{C} t u(t) \quad (6)$$

რაც ნიშნავს რომ კონდენსატორზე ძაბვა იცვლება წრფივად. ჰ

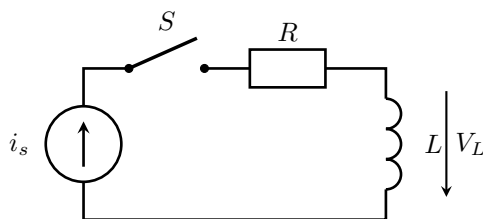
განვიხილოთ სურ.15 წრედი. ვთქვათ წრედში ჩაირთო მუდმივი დენი. მაშინ კოჭაზე მოსული ძაბვა იქნება

$$V_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (7)$$

$$i_L(t) = i_s u(t)$$

$$V_L = L i_s \frac{du}{dt}$$

$$V_L = L i_s \delta(t) \quad (8)$$



სურ 15: კოჭა მუდმივი დენის წრედში

2.1 δ ფუნქციის თვისებები

$$f(t)\delta(t-a) = f(a)\delta(t-a) \quad (9)$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (10)$$

$$\int f(t)\delta(t-a)dt = f(a) \quad (11)$$

$$\delta^{(n)}(t) = \frac{d^{n+1}u(t)}{dt^{n+1}} \quad (12)$$

$$f(t)\delta'(t-a) = f(a)\delta'(t-a) - f'(a)\delta(t-a) \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t-a)dt = (-1)^n \left. \frac{d^n f(t)}{dt^n} \right|_{t=a} \quad (14)$$

დავალება 4: გამოთვალეთ:

1. $3t^4\delta(t-1)$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} t\delta(t-c)dt$

3. $\int t^2 \delta'(t-3) dt$

4. $\int t^2 e^{-t} \delta''(t-2) dt$

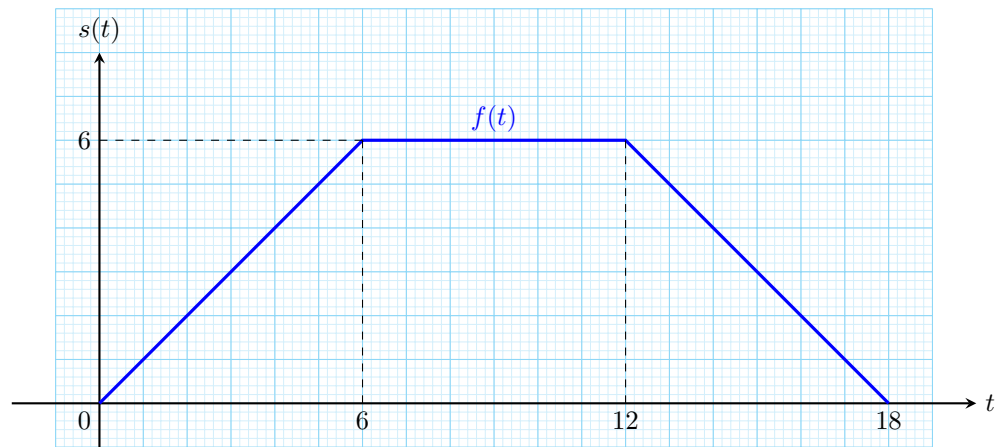
5. $\int \sin^2(t) \delta'(t-\pi/2) dt$

3 სიგნალის გარდაქმნა: $f(2t + 3)$

3.1 საწყისი სიგნალი $f(t)$

უბან-უბან წრფივი სიგნალი $f(t)$ განმარტებულია შემდეგნაირად:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 6 \\ 6, & 6 < t < 12 \\ -t + 18, & 12 < t < 18 \end{cases}$$



სურ 16: საწყისი სიგნალის გრაფიკი $f(t)$

3.2 გარდაქმნა არგუმენტის ჩანაცვლებით

გვსურს იპოვოთ გარდაქმნილი სიგნალი $g(t) = f(2t+3)$. შემოვიღოთ დამხმარე ცვლადი $z = 2t + 3$ და გარდავქმნათ თითოეული ინტერვალი:

1. პირველი ინტერვალი ($0 < z < 6$):

$$0 < 2t + 3 < 6 \implies -3 < 2t < 3 \implies -1.5 < t < 1.5$$

ფუნქციის სახე: $g(t) = z = 2t + 3$.

2. მეორე ინტერვალი ($6 < z < 12$):

$$6 < 2t + 3 < 12 \implies 3 < 2t < 9 \implies 1.5 < t < 4.5$$

ფუნქციის სახე: $g(t) = 6$.

3. მესამე ინტერვალი ($12 < z < 18$):

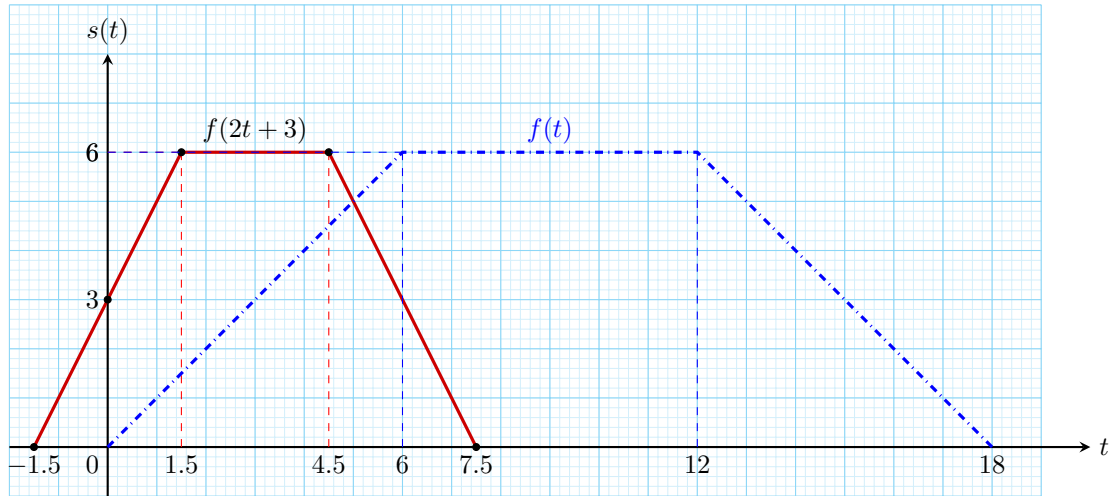
$$12 < 2t + 3 < 18 \implies 9 < 2t < 15 \implies 4.5 < t < 7.5$$

ფუნქციის სახე: $g(t) = -z + 18 = -(2t + 3) + 18 = -2t + 15$.

ამრიგად, გარდაქმნილი სიგნალის საბოლოო სახეა:

$$f(2t + 3) = \begin{cases} 2t + 3, & -1.5 < t < 1.5 \\ 6, & 1.5 < t < 4.5 \\ -2t + 15, & 4.5 < t < 7.5 \end{cases}$$

3.3 გარდაქმნილი სიგნალის გრაფიკი



სურ 17: გარდაქმნილი სიგნალის გრაფიკი $f(2t + 3)$

3.4 გეომეტრიული ინტერპრეტაცია

ზოგადი სახის გარდაქმნა $f(at + \beta)$ შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს შემდეგი სახით:

$$f(at + \beta) = f\left(a \cdot \left(t + \frac{\beta}{a}\right)\right)$$

1. **შეკუმშვა ($a = 2$):** სიგნალი იკუმშება t -ღერძის გასწვრივ 2-ჯერ (საწყისი ინტერვალი $[0, 18]$ გადადის $[0, 9]$ -ში).
2. **წანაცვლება ($\frac{\beta}{a} = 1.5$):** მიღებული სიგნალი ირჩებს მარცხნივ 1.5 ერთეულით (ინტერვალი $[0, 9]$ გადადის $[-1.5, 7.5]$ -ში).

4 სიგნალის წარმოდგენა ჰევისაიდის (ჩართვის) ფუნქციით

ერთეულოვანი ჩართვის (ჰევისაიდის) ფუნქცია განმარტებულია შემდეგნაირად:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

დროში t_0 ერთეულით წანაცვლებული ფუნქცია $u(t - t_0)$ ირთვება $t = t_0$ მომენტში.

მონაკვეთის ამოჭრის ფიზიკური და მათემატიკური პრინციპი

ნებისმიერი $y(t)$ წრფისგან $[t_1, t_2]$ შუალედში მონაკვეთის მისაღებად გამოიყენება ორი მოქმედება:

1. **მონაკვეთის დასაწყისი ($t = t_1$):** წრფე $y(t)$ მრავლდება $u(t - t_1)$ ფუნქციაზე. რადგან $u(t - t_1) = 0$, როცა $t < t_1$, სიგნალი t_1 -მდე არის ნული. t_1 წერტილიდან კი იწყება $y(t)$ წრფე, ანუ მიიღება უსასრულო სხივი:

$$y(t) \cdot u(t - t_1)$$

2. **მონაკვეთის დასასრული ($t = t_2$):** რადგან სხივი უსასრულოდ გაგრძელდება, $t = t_2$ მომენტში მას უნდა გამოვაკლოთ იგივე $y(t)$ წრფე, რომელიც ირთვება t_2 წერტილიდან:

$$-y(t) \cdot u(t - t_2)$$

შედეგად, $t > t_2$ უბანზე $y(t) - y(t) = 0$ და სიგნალი ითიშება.

ამრიგად, $y(t)$ წრფისგან $[t_1, t_2]$ შუალედის ამოჭრა "ფანჯარა" ფუნქციით ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$y(t) \cdot [u(t - t_1) - u(t - t_2)]$$

თითოეული მონაკვეთის ანალიზი სიგნალისთვის $g(t) = f(2t + 3)$

გამოვიყენოთ ეს წესი $g(t)$ სიგნალის სამივე მონაკვეთისთვის:

1. **პირველი მონაკვეთი (წრფე $y_1(t) = 2t + 3$, შუალედი $[-1.5, 1.5]$):**

- $t = -1.5$ წერტილში ირთვება $2t + 3$ წრფე: $(2t + 3)u(t + 1.5)$ (სხივი).
- $t = 1.5$ წერტილში ითიშება ეს წრფე: $-(2t + 3)u(t - 1.5)$.
- ჯამური გამოსახულება: $(2t + 3)[u(t + 1.5) - u(t - 1.5)]$.

2. **მეორე მონაკვეთი (მუდმივი $y_2(t) = 6$, შუალედი $[1.5, 4.5]$):**

- $t = 1.5$ წერტილში ირთვება მუდმივი 6: $6u(t - 1.5)$.

- $t = 4.5$ წერტილში ითიშება მუდმივი 6: $-6u(t - 4.5)$.
- ჯამური გამოსახულება: $6[u(t - 1.5) - u(t - 4.5)]$.

3. მესამე მონაკვეთი (წრფე $y_3(t) = -2t + 15$, შუალედი $[4.5, 7.5]$):

- $t = 4.5$ წერტილში ირთვება $-2t + 15$ წრფე: $(-2t + 15)u(t - 4.5)$.
- $t = 7.5$ წერტილში ითიშება ეს წრფე: $-(-2t + 15)u(t - 7.5)$.
- ჯამური გამოსახულება: $(-2t + 15)[u(t - 4.5) - u(t - 7.5)]$.

საბოლოო ანალიზური გამოსახულება

სამივე სეგმენტის შეკრებით მივიღებთ მთლიანი სიგნალის გამოსახულებას:

$$f(2t+3) = (2t+3)[u(t+1.5)-u(t-1.5)]+6[u(t-1.5)-u(t-4.5)]+(-2t+15)[u(t-4.5)-u(t-7.5)]$$

თუ გავხსნით ფრჩხილებს და დავაჯგუფებთ წევრებს ერთნაირი $u(t - t_k)$ ჩართვის ფუნქციების მიხედვით, მივიღებთ სიგნალის სუპერპოზიციურ ფორმას:

$$\begin{aligned} f(2t+3) &= (2t+3)u(t+1.5) \\ &\quad + [6 - (2t+3)]u(t-1.5) \\ &\quad + [(-2t+15) - 6]u(t-4.5) \\ &\quad - (-2t+15)u(t-7.5) \end{aligned}$$

ფრჩხილების გამარტივებით მივიღებთ საბოლოო კომპაქტურ სახეს:

$$f(2t+3) = (2t+3)u(t+1.5)+(-2t+3)u(t-1.5)+(-2t+9)u(t-4.5)+(2t-15)u(t-7.5)$$

5 სიგნალის გარდაქმნა ჩართვის ფუნქციების საშუალებით

5.1 ამოცანის დასმა

მოცემულია სიგნალი $f(t)$, რომელიც ჩაწერილია ჰევისაიდის (ჩართვის) $u(t)$ ფუნქციების საშუალებით. ვიპოვოთ გარდაქმნილი სიგნალი $f(2t+3)$ ორი განსხვავებული გზით და ვაჩვენოთ მათი ეკვივალენტობა:

1. **მეთოდი 1 (პირდაპირი ჩასმა):** $f(t)$ გამოსახულებაში t ცვლადის პირდაპირი ჩანაცვლებით $(2t+3)$ -ით.
2. **მეთოდი 2 (გარდაქმნის რეცეპტი):** გეომეტრიული ოპერაციების თანმიმდევრული გამოყენებით (სკალირება და წანაცვლება).

კონკრეტული მაგალითი

განვიხილოთ მართკუთხა იმპულსი $[0, T]$ ინტერვალში ამპლიტუდით 1:

$$f(t) = u(t) - u(t - T)$$

მეთოდი 1: პირდაპირი ალგებრული ჩასმა

ჩავანაცვლოთ $t \rightarrow 2t + 3$ საწყის $f(t)$ გამოსახულებაში:

$$f(2t + 3) = u(2t + 3) - u((2t + 3) - T)$$

გავიტანოთ 2 ფრჩხილებს გარეთ ჰევისაიდის ფუნქციის არგუმენტებში:

$$u(2t + 3) = u\left(2\left(t + \frac{3}{2}\right)\right) = u\left(t + \frac{3}{2}\right)$$

$$u(2t + 3 - T) = u\left(2\left(t - \frac{T-3}{2}\right)\right) = u\left(t - \frac{T-3}{2}\right)$$

შესაბამისად, იღებს სახეს:

$$f(2t + 3) = u\left(t + \frac{3}{2}\right) - u\left(t - \frac{T-3}{2}\right) \quad (15)$$

მეთოდი 2: გარდაქმნის „რეცეპტი“ (ეტაპობრივი გარდაქმნა)

არგუმენტი წარმოვადგინოთ კანონიკური სახით:

$$2t + 3 = 2\left(t - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)$$

ეს გვიჩვენებს გარდაქმნის ორნაბიჯიან თანმიმდევრობას:

1. **ნაბიჯი 1 (დროითი შეკუმშვა/სკალირება 2-ჯერ):** $f_1(t) = f(2t)$

$$f_1(t) = u(2t) - u(2t - T) = u(t) - u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

2. **ნაბიჯი 2 (წანაცვლება მარცხნივ $\frac{3}{2}$ ერთეულით):** $f_2(t) = f_1\left(t + \frac{3}{2}\right) = f\left(2\left(t + \frac{3}{2}\right)\right) = f(2t + 3)$

ჩავანაცვლოთ $t \rightarrow t + \frac{3}{2}$ წინა ნაბიჯის $f_1(t)$ შედეგში:

$$f_2(t) = u\left(t + \frac{3}{2}\right) - u\left(\left(t + \frac{3}{2}\right) - \frac{T}{2}\right)$$

გავამარტივოთ მეორე ჰევისაიდის ფუნქციის არგუმენტი:

$$\left(t + \frac{3}{2}\right) - \frac{T}{2} = t - \left(\frac{T}{2} - \frac{3}{2}\right) = t - \frac{T-3}{2}$$

შედეგად ვიღებთ:

$$f_2(t) = u\left(t + \frac{3}{2}\right) - u\left(t - \frac{T-3}{2}\right) \quad (16)$$

დასკვნა

როგორც (15) და (16) ტოლობებიდან ჩანს, პირდაპირი ჩასმითა და გარდაქმნის გეომეტრიული „რეცეპტით“ მიღებული შედეგები აბსოლუტურად იდენტურია:

$$f(2t+3) = u\left(t + \frac{3}{2}\right) - u\left(t - \frac{T-3}{2}\right)$$

ეს ადასტურებს, რომ ჰევისაიდის ფუნქციებით ჩაწერილი სიგნალის გარდაქმნა სრულად ემორჩილება სიგნალთა თეორიის გეომეტრიულ წესებს.

5.2 სკალირება არეკვლით ($t \rightarrow -2t - 4$)

როდესაც t -ს წინ კოეფიციენტი უარყოფითია, ჩნდება დროითი არეკვლის ეფექტი. ჰევისაიდის ფუნქციისთვის მოქმედებს თვისება:

$$u(-x) = 1 - u(x)$$

განვიხილოთ იგივე საწყისი სიგნალი $f(t) = u(t) - u(t - T)$ და ვიპოვოთ $f(-2t - 4)$.

მეთოდი 1: პირდაპირი ალგებრული ჩასმა

ჩავანაცვლოთ $t \rightarrow -2t - 4$:

$$f(-2t - 4) = u(-2t - 4) - u(-2t - 4 - T)$$

გავიტანოთ -2 ფრჩხილებს გარეთ:

$$u(-2t - 4) = u(-2(t + 2)) = u(-(t + 2)) = 1 - u(t + 2)$$

$$u(-2t - 4 - T) = u\left(-2\left(t + 2 + \frac{T}{2}\right)\right) = 1 - u\left(t + 2 + \frac{T}{2}\right)$$

შევატანოთ მიღებული გამოსახულებები საწყისში:

$$f(-2t - 4) = [1 - u(t + 2)] - \left[1 - u\left(t + 2 + \frac{T}{2}\right)\right]$$

ერთიანები ბათილდება და ვიღებთ:

$$f(-2t - 4) = u\left(t + 2 + \frac{T}{2}\right) - u(t + 2) \quad (17)$$

მეთოდი 2: „რეცეპტი“ არეკვლით, სკალირებითა და წანაცვლებით

წარმოვადგინოთ არგუმენტი კანონიკური სახით:

$$-2t - 4 = -2(t + 2)$$

გარდაქმნა დავყოთ 3 ნაბიჯად:

1. **ნაბიჯი 1 (არეკვლა y -ღერძის მიმართ):** $f_1(t) = f(-t)$

$$f_1(t) = u(-t) - u(-t - T) = [1 - u(t)] - [1 - u(t + T)] = u(t + T) - u(t)$$

2. **ნაბიჯი 2 (შეკუმშვა 2-ჯერ):** $f_2(t) = f_1(2t)$

$$f_2(t) = u(2t + T) - u(2t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u(t)$$

3. **ნაბიჯი 3 (წანაცვლება მარცხნივ 2 ერთეულით):** $f_3(t) = f_2(t + 2)$

ჩავანაცვლოთ $t \rightarrow t + 2$ წინა ნაბიჯის $f_2(t)$ შედეგში:

$$f_3(t) = u\left(t + 2 + \frac{T}{2}\right) - u(t + 2) \quad (18)$$

შედეგის ანალიზი

(17) და (18) ფორმულები სრულად ემთხვევა ერთმანეთს.

ყურადღება მიაქციეთ მნიშვნელოვან დეტალს: საწყისი იმპულსი $f(t)$ მდებარეობდა $[0, T]$ ინტერვალში (სიგრძე T). გარდაქმნილი იმპულსი $f(-2t - 4)$ იწყება $t = -\left(2 + \frac{T}{2}\right)$ წერტილში და მთავრდება $t = -2$ წერტილში (ინტერვალის სიგრძე გახდა $\frac{T}{2}$, ანუ 2-ჯერ შეიკუმშა და მარცხნივ აირეკლა).